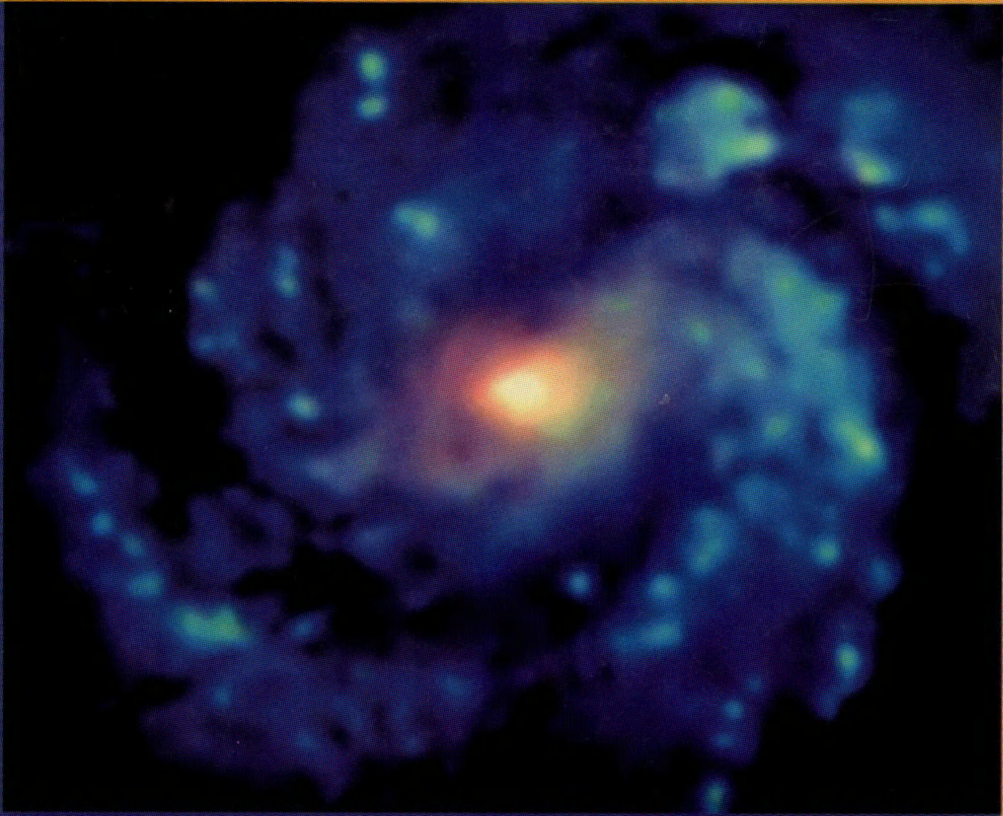
А. А. Логунов



ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

«НАУКА»

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОТДЕЛЕНИЕ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

А. А. Логунов

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Издание второе, дополненное

МОСКВА
«НАУКА»
2001

УДК 501
ББК 22.31
Л 69

Рецензенты:
академик А.М. БАЛДИН,
член-корреспондент РАН С.С. ГЕРШТЕЙН

Логунов А.А.
Теория гравитационного поля. – М.: Наука, 2001. – 238 с.
ISBN 5-02-002741-3

В рамках специальной теории относительности построена релятивистская теория гравитации (РТГ). Источником гравитационного поля является плотность тензора энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле. В теории имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Такой подход позволяет однозначно построить теорию гравитационного поля как калибровочную теорию. Согласно РТГ, однородная и изотропная Вселенная может быть только "плоской" и развивается циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т.д.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики.

Logunov A.A.
The Theory of Gravitational Field. – M.: Nauka, 2001. – 238 p.
ISBN 5-02-002741-3

In the framework of the special theory of relativity, the relativistic theory of gravitation (RTG) is constructed. The energy-momentum tensor density of all the matter fields (including gravitational one) is treated as a source of the gravitational field. The energy-momentum and the angular momentum conservation laws are fulfilled in this theory. Such an approach permits us to unambiguously construct the gravitational field theory as a gauge theory. According to the RTG, the homogeneous and isotropic Universe is to be "flat". It evolves cyclewise from some maximal density to the minimal one, etc.

The book is designed for scientific workers, post-graduates and upper-year students majoring in theoretical physics.

ISBN 5-02-002741-3

Содержание

Предисловие

Данная монография подводит итоги исследований по разработке релятивистской теории гравитации (РТГ), выполненных в работах [3, 9, 38, 10, 5, 11, 6, 34, 12, 35, 36, 37, 31, 13]. Подробные ссылки на ранние работы, которые в какой-то степени были своеобразными строительными лесами при построении РТГ, приведены в монографии [10], написанной совместно с проф. М.А.Мествиришвили и изданной в 1989 году. Там же даны критические замечания в адрес общей теории относительности (ОТО), которые остаются в силе и на текущий момент. Для лучшего освоения материала в разделе 14 приведены элементы тензорного анализа и римановой геометрии. При изложении мы, как правило, используем систему единиц, в которой $G = c = \hbar = 1$. Однако в окончательных выражениях мы восстанавливаем зависимость от постоянных $G, c, \hbar$. В книге греческие буквы принимают значения 0,1,2,3, тогда как латинские буквы — 1,2,3.

Монография создавалась по мере завершения исследований по отдельным вопросам, поэтому неизбежны повторения, особенно по тем моментам, которые важны для понимания сути как РТГ, так и ОТО.

В основе РТГ лежит гипотеза о том, что гравитационное поле, как и все другие физические поля, развивается в пространстве Минковского, а его источником является сохраняющийся тензор энергии-импульса материи, включая и само гравитационное поле. Такой подход позволяет однозначно построить теорию гравитационного поля как калибровочную теорию. При этом возникает эффективное риманово пространство, которое в буквальном смысле имеет полевую природу. В ОТО пространство предполагается римановым из-за наличия вещества, а поэтому гравитация рассматривается как следствие искривленности пространства-времени. В РТГ гравитационное поле обладает спинами 2 и 0 и является физическим полем в духе Фарадея–Максвелла. Полная система уравнений РТГ непосредственно следует из принципа наименьшего действия. Поскольку все физические поля развиваются в пространстве Минковского, в РТГ строго выполняются фундаментальные физические принципы — интегральные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. В теории реализуется принцип Маха: инерциальная система определяется распределением материи. Ускорение, в отличие от ОТО, имеет абсолютный смысл. Силы инерции и силы гравитации разделены, и они имеют разную природу. Теория, в отличие от ОТО, однозначно объясняет результаты всех гравитационных эффектов в Солнечной системе. **ОТО не удовлетворяет принципу соответствия, не объясняет равенство инертной и активной гравитационной масс и не дает однозначного предсказания для гравитационных эффектов. В ней отсутствуют обычные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения материи.**

Следует особо отметить, что известное постньютоновское приближение удовлетворяет принципу соответствия, однозначно описывает гравитационные эффекты в Солнечной системе, а также устанавливает равенство инертной и активной гравитационной масс. Однако оно не является однозначным следствием уравнений ОТО, поскольку при его выводе используются дополнительные предположения, не следующие из теории, т.е. совершается выход за пределы ОТО, который основывается на представлении гравитационного поля как физического поля, хотя в ОТО таковым оно не является. Поэтому это приближение нельзя считать однозначным следствием уравнений ОТО. Оно, скорее, угадано, чем получено из теории, тогда как, согласно РТГ, постньютоновское приближение однозначно следует из уравнений теории. Таким образом, ранее используемое для описания гравитационных эффектов постньютоновское приближение непосредственно следует из нашей теории. Принципиальные изменения РТГ вносит в характер развития Вселенной и коллапс больших масс.

При анализе развития однородной и изотропной Вселенной РТГ приводит к выводу, что Вселенная бесконечна и она "плоская". Ее развитие идет циклически от некоторой максимальной плотности до минимальной и т.д. Таким образом, никакого Большого точечного взрыва в прошлом не было. Было состояние с большой плотностью и высокой температурой в каждой точке пространства.

Согласно РТГ, так называемое космологическое "расширение" Вселенной, наблюдаемое по красному смещению, объясняется изменением гравитационного поля во времени, а не относительным движением — разбеганием галактик, которого нет. Вещество во Вселенной находится в состоянии покоя относительно инерциальной системы координат. Пекулярные скорости галактик относительно инерциальной системы возникли из-за некоторой структуры неоднородности распределения вещества в период, когда Вселенная стала прозрачной. Это означает, что в прошлом расстояние между галактиками никогда не было равным нулю. Теория предсказывает существование во Вселенной большой скрытой массы "темной материи". Согласно РТГ, "черные дыры" невозможны: коллапсирующая звезда не может уйти под свой гравитационный радиус. Объекты больших масс могут существовать, и они характеризуются не только массой, но и распределением плотности вещества. Поскольку, согласно ОТО, объекты с массой больше трех масс Солнца превращаются на заключительной стадии эволюции в "черные дыры", то обычно, когда обнаруживают объект с большой массой, его стараются отнести к "черным дырам". Так как предсказания относительно поведения больших масс РТГ принципиально отличаются от предсказаний ОТО, то для проверки выводов теории необходимы более детальные данные наблюдений. Например, в РТГ сферически-симметричная аккреция вещества на тело большой массы, находящееся на заключительной стадии эволюции (когда ядерные ресурсы исчерпаны), будет сопровождаться значительным энерговыделением из-за падения вещества на поверхность тела. Тогда как в ОТО при сферически-симметричной аккреции вещества на “черную дыру” энерговыделение будет крайне малым, поскольку падающее вещество уносит энергию в “черную дыру”. Данные наблюдений за такими объектами могли бы дать ответ: существуют ли в природе “черные дыры”. Полевые представления о гравитации с необходимостью требуют введения массы покоя гравитона, которая может быть определена по данным наблюдений: “постоянной” Хаббла и параметру замедления q. Согласно теории, параметр q в настоящее время может быть только положительным, т.е. имеет место замедление “расширения” Вселенной, а не ускорение. Поэтому последние сведения об ускорении “расширения” необходимо тщательно проверить, поскольку выводы теории о “замедлении” следуют из общих физических принципов, упомянутых выше.

Я выражаю чувство глубокой благодарности моему учителю академику Н.Н. Боголюбову, который в трудные годы поиска и борьбы оказал мне моральную поддержку и помог ценными советами, стимулировавшими ход исследований.

Я благодарен *Провидению*, что со мной на протяжении более сорока лет была опорой в жизни моя супруга Анна Николаевна.

Я искренне признателен профессору М.А. Мествиришвили за многолетнюю совместную работу по построению релятивистской теории гравитации.

Я благодарен академикам А.М. Балдину, В.С. Владимирову, В.Г. Кадышевскому, А.Н. Тавхелидзе за ценные обсуждения.

Я пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность профессорам С.С. Герштейну, В.И. Денисову, Ю.М. Лоскутову, доценту А.А. Власову и кандидату физико-математических наук Ю.В. Чугрееву за совместные работы и многочисленные обсуждения излагаемых проблем. Я также признателен профессорам В.А. Петрову, Н.Е. Тюрину, А.А. Тяпкину и О.А. Хрусталеву за полезные дискуссии.

Выражаю глубокую благодарность академику А.М. Балдину, члену-корреспонденту С.С. Герштейну и профессору М.А. Мествиришвили, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных советов и замечаний.

А.А.Логунов
Апрель 2000 г.

Введение

Поскольку релятивистская теория гравитации (РТГ) строится на основе специальной теории относительности (СТО), мы остановимся на последней более подробно, при этом рассмотрим как подход Анри Пуанкаре, так и подход Альберта Эйнштейна. Такой анализ позволит глубже понять различие этих подходов и даст возможность сформулировать суть теории относительности.

Пуанкаре, анализируя преобразования Лоренца, показал, что эти преобразования вместе со всеми пространственными вращениями образуют **группу**, которая не изменяет уравнений электродинамики. Ричард Фейнман об этом писал так: *"Именно Пуанкаре предложил исследовать, что можно делать с уравнениями, не меняя при этом их вида. Именно ему принадлежит идея обратить внимание на свойства симметрии физических законов"*[1]. Пуанкаре не ограничился только электродинамикой, он открыл уравнения релятивистской механики и распространил преобразования Лоренца на все силы природы. Открытие группы, которую Пуанкаре назвал группой Лоренца, позволило ему ввести четырехмерное пространство-время с **инвариантом**, названным впоследствии интервалом

$$d\sigma^2 = (dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 \,. \qquad (\alpha)$$

Именно отсюда совершенно очевидно, что время и пространственная длина **относительны**.

Позднее дальнейшее развитие теории в этом же направлении сделал Герман Минковский, введя понятия времениподобных и пространственноподобных интервалов. Точно следуя А.Пуанкаре и Г.Минковскому, суть теории относительности можно сформулировать таким образом: **все физические явления протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова и**

[1] Р.Фейнман. Характер физических законов. М.: Мир, 1968, с.97.

определяется интервалом (α). При этом важно подчеркнуть, что **геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи, которые и делают ее универсальной.** В четырехмерном пространстве (пространство Минковского) можно взять достаточно произвольную систему координат

$$X^\nu = f^\nu(x^\mu) ,$$

осуществляющую взаимно однозначное соответствие с якобианом, отличным от нуля. Находя дифференциалы

$$dX^\nu = \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

и подставляя эти выражения в (α), найдем

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \ , \ \text{где}$$

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \epsilon_\sigma \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\sigma}{\partial x^\nu} \ , \ \epsilon_\sigma = (1, -1, -1, -1) \ . \qquad (\beta)$$

Совершенно очевидно, что переход к произвольной координатной системе, который был совершен, не вывел нас за рамки псевдоевклидовой геометрии. Но отсюда следует, что в СТО можно пользоваться и неинерциальными системами координат. Силы инерции, возникающие при переходе к ускоренной системе координат, выражаются символами Кристоффеля пространства Минковского. Представление СТО, восходящее к работам А.Пуанкаре и Г.Минковского, явилось более общим и оказалось чрезвычайно необходимым для построения РТГ, так как оно позволило ввести метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}(x)$ пространства Минковского в произвольных координатах и тем самым дало возможность ввести ковариантным образом гравитационное поле, отделив силы инерции от гравитации.

С точки зрения истории следует отметить, что А.Пуанкаре в ранних работах[2] ("Измерение времени", "Настоящее и будущее математической физики") подробно описал

[2]А.Пуанкаре. Принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973, с.19,33.

вопросы о постоянстве скорости света, об одновременности событий в разных точках пространства путем синхронизации часов с помощью светового сигнала. В дальнейшем, опираясь на принцип относительности, который он сформулировал в 1904 году для всех физических явлений, а также на работу Г.Лоренца, опубликованную в том же году, **А.Пуанкаре в 1905 году открыл группу преобразований, назвав ее группой Лоренца. Это позволило ему дать по сути следующую точную формулировку теории относительности: уравнения физических процессов должны быть инвариантными относительно группы Лоренца.** Именно такая формулировка появилась у А.Эйнштейна в 1948 году: *"С помощью преобразования Лоренца специальный принцип относительности может быть сформулирован следующим образом: законы природы инвариантны относительно преобразования Лоренца (т.е. закон природы не должен измениться, если отнести его к новой инерциальной системе при помощи преобразования Лоренца для x, y, z, t)"*[3].

Наличие группы координатно-временных преобразований означает, что существует бесконечный набор эквивалентных (инерциальных) координатных систем, связанных преобразованиями Лоренца. Из инвариантности уравнений тривиально следует, что физические уравнения в системах координат x и x', связанных преобразованиями Лоренца, одинаковы. Но это означает, что любое явление, описываемое как в системе координат x, так и в системе x', при одинаковых условиях даст тождественные результаты, т.е. принцип относительности тривиально выполняется. Некоторые, даже крупные, физики это поняли с трудом, а другие так и не поняли. В этом нет ничего странного, ведь любое изучение требует определенного профессионализма. Удивительно другое: свое непонимание или труд-

[3]А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.133, с.660.

ность понимания, испытанную ими, они пытаются объяснить тем, что якобы А.Пуанкаре "не сделал решающего шага", "до конца не дошел". Но эти высказывания характеризуют не уровень выдающихся достижений А.Пуанкаре по теории относительности, а их собственный уровень понимания проблемы.

Именно по этому поводу В.Паули в 1955 году, в связи с 50-летием теории относительности, писал: "*И Эйнштейн, и Пуанкаре опирались на подготовительные работы Г.А.Лоренца, весьма близко подошедшего к окончательному результату, но не сумевшего сделать последний решающий шаг. В совпадении результатов, полученных независимо друг от друга Эйнштейном и Пуанкаре, я усматриваю глубокий смысл в гармонии математического метода и анализа, проводимого с помощью мысленных экспериментов, опирающихся на всю совокупность данных физического опыта*"[4].

Детально изучая инварианты группы Лоренца, Пуанкаре открыл псевдоевклидову геометрию пространства-времени. Именно на этой основе он установил четырехмерность физических величин: силы, скорости, импульса, тока. Первая краткая работа Пуанкаре появилась в докладах Французской академии наук еще до того как была направлена в печать работа Эйнштейна. Она содержала точное и строгое описание решения проблемы электродинамики движущихся тел и в то же время распространение преобразования Лоренца на все силы природы, какого бы происхождения они ни были. Очень часто многие историки, да и физики обсуждают вопросы приоритета. По этому вопросу правильная оценка дана академиками В.Л.Гинзбургом и Я.Б.Зельдовичем, которые в 1967 году писали: "*Например, что бы человек ни сделал сам, он не может претен-*

---

[4] В.Паули. Физические очерки. М.: Наука, 1975, с.189.

довать на приоритет, если затем выяснилось, что тот же результат получен ранее другими"[5].

А.Эйнштейн шел к теории относительности по пути анализа понятия одновременности и синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, используя принцип относительности и опираясь на принцип постоянства скорости света. «*Каждый луч света движется в "покоящейся" системе координат с определенной скоростью V, независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом*». Но сформулированное им положение нельзя рассматривать как принцип, поскольку оно предполагает определенный выбор координат, а ведь физический принцип не должен зависеть от способа выбора координатной системы. Фактически А.Эйнштейн, по существу, точно следовал ранним работам А.Пуанкаре. Однако при таком подходе невозможно прийти к неинерциальным системам координат, так как в них нельзя пользоваться синхронизацией часов, а поэтому теряет смысл понятие одновременности, да и скорость света нельзя считать постоянной.

В ускоренной системе координат собственное время $d\tau$

$$d\sigma^2 = d\tau^2 - s_{ik}dx^i dx^k,\ d\tau = \frac{\gamma_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{\gamma_{00}}},\ s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}},$$

не является полным дифференциалом, а поэтому синхронизация часов, находящихся в разных точках пространства, зависит от пути синхронизации. Это означает, что такое понятие для ускоренных систем координат неприменимо. Следует подчеркнуть, что координаты в выражении (β) сами по себе не имеют метрического смысла. Физически измеряемые величины необходимо строить с помощью координат и метрических коэффициентов $\gamma_{\mu\nu}$. Но все это в СТО долгое время не было понято, поскольку обычно следовали

[5] В.Л.Гинзбург, Я.Б.Зельдович. Знакомый и незнакомый Зельдович. М.: Наука, 1993, с.88.

подходу Эйнштейна, а не подходу Пуанкаре и Минковского. Таким образом, исходные положения Эйнштейна имели сугубо ограниченный частный характер, хотя, может быть, они и создали иллюзию простоты. Именно поэтому А.Эйнштейн даже в 1913 году писал: "*В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования*"[6]. Или немного позднее в этом же году он пишет: "*В первоначальной теории относительности независимость физических уравнений от специального выбора системы отсчета основывается на постулировании фундаментального инварианта $ds^2 = \sum dx_i^2$, а теперь речь идет о том, чтобы построить теорию* (имеется в виду общая теория относительности. — *Прим. А.Л.*), *в которой роль фундаментального инварианта играет линейный элемент общего вида*

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx^i dx^k \text{ ''}^{7}.$$

Аналогичное утверждение А.Эйнштейн высказывал и в 1930 году: "*В специальной теории относительности разрешаются только такие изменения координат (преобразования), что и в новых координатах величина ds^2 (фундаментальный инвариант) имеет вид суммы квадратов дифференциалов новых координат. Такие преобразования называются преобразованиями Лоренца*"[8].

Отсюда следует, что подход А.Эйнштейна не привел его к представлению о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Сравнивая подходы Пуанкаре и Эйнштейна к построению СТО, очевидно, что подход Пуанкаре более глубокий и общий, поскольку именно он определил псевдоевклидову структуру пространства-времени.

---

[6] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.21, с.232.

[7] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.22, с.269.

[8] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.95, с.281.

Подход Эйнштейна существенно сужал рамки СТО, а поэтому в течение весьма долгого времени считалось, что СТО справедлива только в инерциальных системах координат. При этом пространство Минковского рассматривалось как некоторая полезная геометрическая интерпретация основ СТО в подходе Эйнштейна. Перейдем теперь к гравитации. А.Пуанкаре в 1905 году писал, что *"силы любого происхождения, и в частности силы тяготения, ведут себя при поступательном движении (или, если угодно, при преобразованиях Лоренца) совершенно так же, как электромагнитные силы"*[9]. Именно по этому пути мы и будем следовать.

А.Эйнштейн, обратив внимание на равенство инертной и гравитационной масс, пришел к убеждению, что силы инерции и гравитации родственны, поскольку их действие не зависит от массы тела. В 1913 году он сделал вывод, что если в выражении (α) *"... мы введем новые координаты x_1, x_2, x_3, x_4 при помощи произвольной подстановки, то относительно новой координатной системы движение точки будет происходить согласно уравнению*

$$\delta\{\int ds\} = 0 ,$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \text{ ''}.$$

И далее он отмечал: «*В новой координатной системе движение материальной точки определяется величинами $g_{\mu\nu}$, которые в соответствии с предыдущими параграфами следует понимать как составляющие гравитационного поля, как только мы захотим рассматривать эту новую систему "покоящейся"*»[10]. **Такое отождествле-**

[9] А.Пуанкаре. Специальный принцип относительности. М.: Атомиздат, 1973, с.152.

[10] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.23, с.286.

ние метрического поля, полученного из (α) с помощью координатных преобразований, с гравитационным полем не имеет никаких физических оснований, поскольку преобразования координат не выводят за рамки псевдоевклидовой геометрии. С нашей точки зрения недопустимо считать такое метрическое поле гравитационным полем, поскольку это противоречит самой сущности понятия поля как физической реальности. Поэтому нельзя согласиться со следующими рассуждениями А.Эйнштейна: «*По отношению к системе K' гравитационное поле "существует" в том же самом смысле, как и всякая другая физическая величина, которая может быть определена в некоторой системе координат, несмотря на то что ее не существует в системе K. Здесь нет ничего странного, и это легко доказать следующим примером, заимствованным из классической механики. Никто не сомневается в "реальности" кинетической энергии, так как иначе пришлось бы отрицать энергию вообще. Однако ясно, что кинетическая энергия тел зависит от состояния движения координатной системы: подходящим выбором последней можно, очевидно, сделать так, что в некоторый определенный момент кинетическая энергия поступательного движения одного тела примет наперед заданное положительное или нулевое значение. В специальном случае, при одинаково направленных и равных по величине скоростях всех масс, можно подходящим выбором координатной системы сделать общую кинетическую энергию равной нулю. Аналогия, на мой взгляд, полная*»[11].

А.Эйнштейн, как мы видим, отказался от концепции классического поля типа Фарадея–Максвелла, обладающего плотностью энергии-импульса, в применении к гравитационному полю. Этот путь и привел его к построению

[11] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.46, с.620.

ОТО, к нелокализуемости гравитационной энергии, к введению псевдотензора гравитационного поля. Если же рассматривать гравитационное поле как физическое поле, то оно, как и все физические поля, характеризуется тензором энергии-импульса $t^{\mu\nu}$. Если в какой-либо системе координат, например K', гравитационное поле существует, то это означает, что некоторые компоненты (или все) тензора $t^{\mu\nu}$ отличны от нуля. Путем преобразования координат тензор $t^{\mu\nu}$ нельзя обратить в нуль, т.е. если гравитационное поле существует, то это — физическая реальность и ее нельзя уничтожить выбором системы координат. Сравнивать такое гравитационное поле с кинетической энергией неправомерно, так как последняя не характеризуется ковариантной величиной. Следует отметить, что данное сравнение недопустимо и в ОТО, поскольку гравитационное поле в этой теории характеризуется тензором кривизны Римана. Если он отличен от нуля, то гравитационное поле существует и его нельзя уничтожить выбором системы координат даже локально.

Ускоренные системы координат сыграли в исследованиях А.Эйнштейна важную эвристическую роль, хотя они и не имеют никакого отношения к сути ОТО. Отождествив ускоренные системы координат с гравитационным полем, А.Эйнштейн пришел к метрическому тензору пространства-времени как основной характеристике гравитационного поля, но метрический тензор отражает не только собственные свойства геометрии, но и выбор координатной системы. На этом пути появляется возможность объяснить силу гравитации кинематически, сведя ее к силе инерции, но при этом приходится отказаться от гравитационного поля как физического поля. "*Гравитационные поля,* как писал А.Эйнштейн в 1918 году, *можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии*"[12]. Но это очень

[12]А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.47, с.627.

большая потеря и с ней нельзя согласиться. Однако, как мы увидим далее, при построении РТГ, этой потери можно избежать.

Удивительно, но А.Эйнштейн даже в 1933 году писал: «*В специальной теории относительности — как показал Г.Минковский — эта метрика была квазиевклидовой, т.е. квадрат "длины" ds линейного элемента представлял собой определенную квадратичную функцию дифференциалов координат. Если же вводятся другие координаты с помощью нелинейного преобразования, то* ds^2 *остается однородной функцией дифференциалов координат, но коэффициенты этой функции* ($g_{\mu\nu}$) *будут уже не постоянными, а некоторыми функциями координат. Математически это означает, что физическое (четырехмерное) пространство обладает римановой метрикой*»[13].

Это, конечно, неправильно, ибо преобразованиями координат невозможно превратить псевдоевклидову метрику в риманову. Но главное здесь не в этом, а в том, что именно таким путем, благодаря глубокой интуиции, А.Эйнштейн пришел к необходимости введения именно риманова пространства, считая, что метрический тензор этого пространства $g_{\mu\nu}$ описывает гравитацию. Так был, по существу, открыт тензорный характер гравитации. Единство римановой метрики и гравитации является основным принципом общей теории относительности. В.А.Фок об этом принципе писал, что "*он и составляет сущность теории тяготения Эйнштейна*"[14]. Однако с общей точки зрения вопрос: почему необходимо связать гравитацию именно с римановым пространством, а не с каким-то другим, оставался неясным.

Введение риманова пространства позволило использовать скалярную кривизну R как лагранжеву функцию и с

[13]А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.110, с.405.

[14]В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961, с.308.

помощью принципа наименьшего действия получить уравнения Гильберта–Эйнштейна. Так завершилось построение общей теории относительности Эйнштейна. При этом, как особенно подчеркивал Дж.Синг: "*В теории Эйнштейна в зависимости от того, отличен от нуля тензор Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует. Это свойство абсолютно, оно никак не связано с мировой линией какого-то наблюдателя*"[15].

Однако в ОТО возникли трудности с законами сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Д.Гильберт по этому поводу писал: "*... я утверждаю, что для общей теории относительности, т.е. в случае общей инвариантности гамильтоновой функции, уравнений энергии, которые ... соответствуют уравнениям энергии в ортогонально-инвариантных теориях, вообще не существует, я даже мог бы отметить это обстоятельство как характерную черту общей теории относительности*"[16]. Все это объясняется тем, что в римановом пространстве отсутствует десятипараметрическая группа движения пространства-времени, а поэтому в принципе нельзя ввести законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения, подобные тем, какие имеют место в любой другой физической теории.

Другой особенностью ОТО по сравнению с известными теориями является наличие в лагранжевой функции R вторых производных. Около пятидесяти лет назад Натан Розен показал, что если наряду с римановой метрикой $g_{\mu\nu}$ ввести метрику $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, то можно построить скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля, которая будет содержать производные не выше первого порядка. Он, в частности, построил такую плотность лагранжиана, которая приводит к уравнениям

---

[15]Дж.Синг. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с.9.

[16]В.П.Визгин. Релятивистская теория тяготения. М.: Наука, 1981, с.319.

Гильберта–Эйнштейна. Так возник двуметрический формализм. Однако такой подход сразу усложнил проблему построения теории гравитации, поскольку, используя тензоры $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$, можно написать большое число скалярных плотностей, и совершенно неясно, какую скалярную плотность необходимо выбрать в качестве плотности лагранжиана для построения теории гравитации. Хотя математический аппарат ОТО позволяет ввести вместо обычных производных ковариантные производные пространства Минковского, но поскольку метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не входит в уравнения Гильберта–Эйнштейна, ее использование в ОТО лишено какого-либо физического смысла, так как решения для метрики $g_{\mu\nu}$ не зависят от выбора $\gamma_{\mu\nu}$. Следует отметить, что замена обычных производных на ковариантные в пространстве Минковского оставляет данные уравнения неизменными. Это объясняется тем, что если в тензоре кривизны Римана заменить обычные производные ковариантными в пространстве Минковского, то он не изменится. Такая замена в тензоре Римана есть не что иное, как тождественное преобразование. Именно поэтому в рамках ОТО такую свободу записи тензора Римана нельзя использовать, поскольку метрический тензор пространства Минковского не входит в уравнения Гильберта–Эйнштейна.

При построении РТГ эта свобода записи тензора Римана оказывается чрезвычайно необходимой. Но при этом метрика пространства Минковского входит в уравнения гравитационного поля, а само поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского. В ОТО мы имеем дело только с метрикой риманова пространства как основной характеристикой гравитации, в которой находят отражение собственные свойства геометрии и выбор системы координат. При выключении гравитационного взаимодействия, т.е. когда тензор кривизны Римана равен нулю, мы приходим к пространству Минковского. Именно из-за этого в ОТО возникает проблема с выполнимостью принципа соответствия, так как нельзя определить, в какой системе координат (инерциальной или ускоренной) мы оказались при выключении гравитационного поля.

Релятивистская теория гравитации, которая излагается в данной работе, строится как полевая теория гравитационного поля в рамках специальной теории относительности. Исходным положением служит гипотеза о том, что источником гравитации является универсальная характеристика материи — тензор энергии-импульса. Гравитационное поле рассматривается как универсальное физическое поле со спинами 2 и 0, из-за действия которого и возникает эффективное риманово пространство. Это позволяет найти калибровочную группу и однозначно построить плотность лагранжиана гравитационного поля. Система уравнений данной теории общековариантна и форминвариантна относительно группы Лоренца. При этом в теории с необходимостью требуется введение массы гравитона. Масса гравитона существенно влияет на эволюцию Вселенной и изменяет характер гравитационного коллапса.

Целью настоящей монографии является дальнейшее развитие идей А.Пуанкаре, Г.Минковского, А.Эйнштейна, Д.Гильберта, Н.Розена, В.А.Фока, С.Гупта, В.Тирринга, Р.Фейнмана, С.Вейнберга в области теории относительности и гравитации.

1. Геометрия пространства-времени

В книге "Последние мысли" в главе II "Пространство и время" А.Пуанкаре писал: "*Принцип физической относительности может служить нам для определения пространства. Он дает нам, так сказать, новый измерительный инструмент. Объяснюсь. Как может твердое тело служить нам для измерения или, правильнее, для построения пространства? Дело обстоит здесь следующим образом: перенося твердое тело из одного места в другое, мы замечаем таким образом, что его можно приложить сперва к одной фигуре, потом к другой, и мы соглашаемся считать эти фигуры равными. Из этого соглашения родилась геометрия. Геометрия есть не что иное, как учение о взаимных соотношениях этих преобразований или, выражаясь математическим языком, учение о строении группы, образованной этими преобразованиями, т.е. группы движений твердых тел.*

Возьмем теперь другую группу, группу преобразований, не изменяющих наших дифференциальных уравнений. Мы получаем новый способ определения равенства двух фигур. Мы уже не скажем более: две фигуры равны, когда одно и то же твердое тело может быть приложено и к одной, и к другой. Мы скажем: две фигуры равны, когда одна и та же механическая система, удаленная от соседних систем настолько, что ее можно рассматривать как изолированную, будучи помещена сперва таким образом, что ее материальные точки воспроизводят первую фигуру, а затем таким образом, что они воспроизводят другую фигуру, ведет себя во втором случае так же, как и в первом. Отличаются ли друг от друга существенным образом оба эти взгляда? Нет.

Твердое тело — это такая же механическая система, как и всякая другая. Вся разница между нашими преж-

ним и новым определениями пространства заключается в том, что последнее шире, позволяя заменить твердое тело любой другой механической системой. Более того, наше новое условное соглашение определяет не только пространство, но и время. Оно объясняет нам, что такое два одновременных момента, что такое два равных промежутка времени или же что такое промежуток времени, вдвое больший другого промежутка"[17].

Именно таким путем, открыв группу преобразований, не изменяющих уравнений Максвелла–Лоренца, Пуанкаре ввел представление о четырехмерном пространстве-времени с псевдоевклидовой геометрией. Это представление о геометрии позднее развил Минковский.

В основу развиваемой релятивистской теории гравитации мы положили псевдоевклидову геометрию пространства-времени как фундаментальное пространство Минковского для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Пространство Минковского нельзя считать априорно существующим, поскольку оно отражает свойства материи, следовательно, оно неотделимо от нее. Хотя формально, именно в силу независимости структуры пространства от вида материи, оно иногда рассматривается абстрактно в отрыве от материи. В галилеевых координатах инерциальной системы пространства Минковского интервал, характеризующий структуру геометрии и являющийся инвариантом по построению, имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \,.$$

Здесь dx^ν — дифференциалы координат. Независимость интервала $d\sigma$, как геометрической характеристики пространства-времени, от выбора системы координат задана по построению, тем не менее до сих пор даже в современных курсах по теоретической физике (см., например, [4]) можно увидеть "доказательство", что интервал одинаков во всех

[17]А.Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1983, с.427.

инерциальных системах координат, хотя он является инвариантом и не зависит от выбора системы координат.

Даже такой крупный физик как Л.И.Мандельштам писал: "*... как идут ускоренно движущиеся часы и почему их ход меняется, на это специальная теория относительности ответить не может, ибо она вообще не занимается вопросом об ускоренно движущихся системах отсчета*" [17]. Неправильные утверждения в [27, 19, 20, 30] можно объяснить тем, что пространство Минковского многими рассматривалось не как открытие геометрии пространства-времени, а как якобы формальная геометрическая интерпретация СТО в подходе А.Эйнштейна. На передний план были выдвинуты такие ограниченные понятия, как: постоянство скорости света, синхронизация часов, независимость скорости света от движения источника. Все это существенно сузило рамки СТО и задержало понимание ее сути. **А ведь суть специальной теории относительности и состоит только в том, что геометрия пространства-времени, в которой протекают все физические процессы, есть псевдоевклидова геометрия.**

В произвольной системе координат интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \ ,$$

$\gamma_{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор пространства Минковского. Заметим, что в неинерциальной системе координат, в принципе, нельзя говорить о синхронизации часов и постоянстве скорости света [7]. По-видимому, именно неясность сути СТО и привела А.Эйнштейна к выводу, что "*в рамках специальной теории относительности нет места для удовлетворительной теории тяготения*"[18]. Свободное движение пробного тела в произвольной системе координат происходит по геодезической линии пространства Минков-

[18] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1967. Т.IV, ст.76, с.282.

ского:
$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0 ,$$
где $U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}$ $\gamma^\nu_{\alpha\beta}(x)$ — символы Кристоффеля, определяемые выражением
$$\gamma^\nu_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\gamma^{\nu\sigma}(\partial_\alpha \gamma_{\beta\sigma} + \partial_\beta \gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\alpha\beta}) \cdot$$

В 1921 году в статье "Геометрия и опыт" А.Эйнштейн писал: *"...вопрос о том, имеет этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности..."*[19]. Это, конечно, правильно. Но при этом сразу возникает вопрос: какой опыт? Опытных фактов может быть достаточно много. Так, например, изучая движение света и пробных тел, можно, в принципе, однозначно установить геометрию пространства-времени. Необходимо ли ее и положить в основу физической теории? На первый взгляд на этот вопрос можно ответить утвердительно. И, казалось бы, вопрос исчерпан. Именно по этому пути и пошел А.Эйнштейн при построении ОТО. Пробные тела и свет движутся по геодезическим линиям риманова пространства-времени. Риманово пространство он и положил в основу теории. Однако ситуация в действительности гораздо сложнее. Все виды материи подчиняются законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Эти законы, возникшие путем обобщения многочисленных опытных данных, характеризуют общие динамические свойства всех форм материи, вводя универсальные характеристики, которые позволяют количественно описать превращение одних форм материи в другие. Ведь все это тоже опытные данные, ставшие фунда-

[19]А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.61, с.87.

ментальными физическими принципами. Как быть с ними? Если следовать Эйнштейну и положить в основу риманову геометрию, тогда от них следует отказаться. Но это слишком дорогая цена. Более естественно сохранить их для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. Но в этом случае в основу теории необходимо положить пространство Минковского, т.е. псевдоевклидову геометрию пространства-времени. Этот путь мы и избрали, следуя Пуанкаре. Фундаментальные принципы физики, отражающие многочисленные опытные факты, указывают нам какую геометрию пространства-времени необходимо положить в основу теории гравитации. Таким образом, действительно вопрос о структуре геометрии пространства-времени является вопросом физическим, ответ на который должен дать опыт, только с нашей точки зрения структура геометрии пространства-времени определяется не частными опытными данными о движении пробных тел и света, а фундаментальными физическими принципами, опирающимися на всю совокупность опытных фактов. Именно в этом пункте наши исходные посылки построения теории гравитации совершенно отличаются от представлений, которые Эйнштейн положил в основу ОТО. Но они находятся в полном соответствии с представлениями Пуанкаре.

В основу теории гравитации мы положили псевдоевклидову геометрию, но это отнюдь не означает, что и эффективное пространство также будет псевдоевклидовым. Под действием гравитационного поля можно ожидать, что эффективное пространство будет уже другим. Этот вопрос мы подробно рассмотрим в следующем разделе. Метрика пространства Минковского позволяет ввести понятия эталонной длины и промежутка времени при отсутствии гравитационного поля.

2. Тензор энергии-импульса материи как источник гравитационного поля

Благодаря наличию в пространстве Минковского десятипараметрической группы движения Пуанкаре, для любой замкнутой физической системы существуют десять интегралов движения, т.е. имеют место законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Любое физическое поле в пространстве Минковского характеризуется плотностью тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, являющейся общей универсальной характеристикой для всех форм материи, которая удовлетворяет закону сохранения как локальному, так и интегральному. В произвольной системе координат локальный закон сохранения записывается в форме

$$D_\mu t^{\mu\nu} = \partial_\mu t^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} = 0 \ .$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ — суммарная сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи; D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского. Мы здесь и в дальнейшем всегда будем иметь дело с плотностями скалярных и тензорных величин, определяемых по правилу

$$\tilde{\phi} = \sqrt{-\gamma}\phi \ , \ \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}, \ \gamma = \det(\gamma_{\mu\nu}) \ .$$

Введение плотностей обусловлено тем, что в произвольных координатах инвариантный элемент объема в пространстве Минковского определяется выражением

$$\sqrt{-\gamma} d^4 x \ ,$$

а инвариантный элемент объема в римановом пространстве — выражением

$$\sqrt{-g} d^4 x \ , g = \det(g_{\mu\nu}) \ .$$

Поэтому принцип наименьшего действия имеет вид

$$\delta S = \delta \int L d^4x = 0 ,$$

где L — скалярная плотность лагранжиана материи. При получении уравнений Эйлера с помощью принципа наименьшего действия мы будем автоматически иметь дело с вариацией именно плотности лагранжиана. Плотность тензора энергии-импульса $t^{\mu\nu}$, согласно Гильберту, выражается через скалярную плотность лагранжиана L следующим образом:

$$t^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} , \tag{2.1}$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) , \; \gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} .$$

В силу универсальности гравитации естественно выдвинуть гипотезу, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса всех полей материи $t^{\mu\nu}$ является источником гравитационного поля. Далее мы воспользуемся аналогией с электродинамикой, в которой источником электромагнитного поля является сохраняющаяся плотность векторного тока, а само поле описывается плотностью векторного потенциала $\tilde{A}^\nu$:

$$\tilde{A}^\nu = (\tilde{\phi}, \tilde{A}) .$$

Уравнения электродинамики Максвелла в отсутствии гравитации в произвольных координатах имеют вид

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{A}^\nu + \mu^2 \tilde{A}^\nu = 4\pi \tilde{j}^\nu ,$$
$$D_\nu \tilde{A}^\nu = 0 .$$

Мы для общности ввели параметр μ, который в системе единиц $\hbar = c = 1$ является массой покоя фотона.

Поскольку источником гравитационного поля мы объявили сохраняющуюся плотность тензора энергии-импульса

$t^{\mu\nu}$, то естественно считать гравитационное поле тензорным и описывать его плотностью симметрического тензора $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu},$$

и в полной аналогии с электродинамикой Максвелла уравнения гравитационного поля можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} + m^2 \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \lambda t^{\mu\nu} , \qquad (2.2)$$

$$D_\mu \tilde{\phi}^{\mu\nu} = 0 . \qquad (2.3)$$

Здесь λ — некоторая постоянная, которая, исходя из принципа соответствия с законом тяготения Ньютона, должна быть равна 16π. Уравнение (2.3) исключает спины 1 и $0'$, оставляя поляризационные свойства поля, соответствующие только спинам 2 и 0.

Плотность тензора энергии-импульса материи $t^{\mu\nu}$ состоит из плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ и плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$. Под веществом мы подразумеваем все поля материи, за исключением гравитационного поля:

$$t^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu} + t_M^{\mu\nu} .$$

Взаимодействие гравитационного поля и вещества учитывается в плотности тензора энергии-импульса вещества $t_M^{\mu\nu}$.

А.Эйнштейн еще в 1913 году писал, что "*тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям*" [28]. Именно эту идею А.Эйнштейна мы и положили в основу построения релятивистской теории гравитации. При построении общей теории относительности Эйнштейну не удалось ее реализовать, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор гравитационного поля. Все это произошло из-за того, что Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле (типа Фарадея–Максвелла) в пространстве Минковского. Именно поэтому в уравнениях ОТО не содержится метрика пространства Минковского. Из уравнений (2.2) следует, что они будут нелинейными и для собственно гравитационного поля, поскольку плотность тензора $t_g^{\mu\nu}$ является источником гравитационного поля.

Уравнения (2.2) и (2.3), которые мы формально по аналогии с электродинамикой объявили уравнениями гравитации, нам необходимо получить, основываясь на принципе наименьшего действия, ибо только в этом случае мы будем иметь явное выражение для плотности тензора энергии-импульса гравитационного поля и полей вещества. Но для этого необходимо построить плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля. При этом чрезвычайно важно это построение осуществить исходя из общих положений. Только в этом случае можно говорить о теории гравитации. Исходную скалярную плотность лагранжиана материи можно записать в виде

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \phi_A) \;,$$

здесь L_g — плотность лагранжиана гравитационного поля; L_M — плотность лагранжиана полей вещества; ϕ_A — поля вещества.

Уравнения для гравитационного поля и полей вещества, согласно принципу наименьшего действия, имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{\phi}^{\mu\nu}} = 0 \;, \tag{2.4}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0 \;. \tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) отличаются от выражений (2.2) прежде всего тем, что в них вариационная производная от плотности лагранжиана берется по полю $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$, тогда как в уравнения (2.2), согласно определению (2.1), входит вариационная производная от плотности лагранжиана по метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Для того чтобы для любой формы материи уравнения (2.4) сводились к уравнениям (2.2), необходимо предположить, что тензорная плотность $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ всегда входит в плотность лагранжиана совместно с тензорной плотностью $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ через некоторую единую плотность $\tilde{g}^{\mu\nu}$ в форме

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu}, \ \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

Так возникает эффективное риманово пространство с метрикой $g^{\mu\nu}(x)$. Поскольку гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}(x)$, как и все другие физические поля в пространстве Минковского, описывается в одной системе координат, то из выражения (2.6) очевидно, что величина $\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$ также полностью определяется в одной системе координат. Для описания эффективного риманова пространства, возникающего из-за действия гравитационного поля, не нужен атлас карт, который обычно необходим для описания риманова пространства общего вида. Это означает, что наше эффективное риманово пространство имеет простую топологию. В ОТО топология не простая. Именно и поэтому ОТО в принципе не может быть построена на основе представлений о гравитации как о физическом гравитационном поле в пространстве Минковского.

Если учесть условие (2.6), плотность лагранжиана L принимает вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) \, .$$

Следует подчеркнуть, что условие (2.6) позволяет вариационную производную по $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ заменить вариационной производной по $\tilde{g}^{\mu\nu}$, а вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$ выразить через вариационную производную по $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и вариационную производную по $\gamma_{\mu\nu}$, явно входящую в плотность лагранжиана L. Действительно,

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{\phi}^{\mu\nu}}=\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}=0\ , \tag{2.7}$$

$$\frac{\delta L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}=\frac{\delta^{\star}L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}+\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}\cdot\frac{\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}\ . \tag{2.8}$$

Вывод последней формулы подробно изложен в приложении А (А.17). Звездочкой в (2.8) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. Согласно (2.1), формулу (2.8) можно представить в форме

$$t^{\mu\nu}=-2\frac{\delta L}{\delta\tilde{g}^{\alpha\beta}}\frac{\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}}-2\frac{\delta^{\star}L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\ .$$

Учитывая в данном выражении уравнение (2.7), получим

$$t^{\mu\nu}=-2\frac{\delta^{\star}L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}\ . \tag{2.9}$$

Сравнивая уравнение (2.9) с уравнением (2.2), находим условие

$$-2\frac{\delta^{\star}L}{\delta\gamma_{\mu\nu}}=\frac{1}{16\pi}[\gamma^{\alpha\beta}D_{\alpha}D_{\beta}\tilde{\phi}^{\mu\nu}+m^2\tilde{\phi}^{\mu\nu}]\ , \tag{2.10}$$

которое в случае его выполнения обеспечивает возможность получения уравнений гравитационного поля (2.2) и (2.3), основываясь на принципе наименьшего действия. Поскольку в правую часть (2.10) не входят поля вещества, то это означает, что вариация плотности лагранжиана вещества L_M по явно входящей метрике $\gamma_{\mu\nu}$ должна быть равна нулю. Чтобы не возникало каких-либо дополнительных ограничений на движение вещества, определяемое уравнением (2.5), отсюда непосредственно следует, что тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не входит явно в выражение для плотности лагранжиана вещества L_M. Тогда условие (2.10) принимает вид

$$-2\frac{\delta^{\star}L_g}{\delta\gamma_{\mu\nu}}=\frac{1}{16\pi}[\gamma^{\alpha\beta}D_{\alpha}D_{\beta}\tilde{\phi}^{\mu\nu}+m^2\tilde{\phi}^{\mu\nu}]\ . \tag{2.11}$$

Таким образом, все сводится к тому, чтобы найти плотность лагранжиана собственно гравитационного поля L_g, которая удовлетворяла бы условию (2.11).

В то же время из предыдущих рассуждений мы приходим к важному выводу, что плотность лагранжиана материи L имеет вид

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A) . \qquad (2.12)$$

Таким образом, из требования, чтобы плотность тензора энергии-импульса материи являлась источником гравитационного поля, естественно следует, что движение вещества должно происходить в эффективном римановом пространстве. Это утверждение равнозначно теореме. Отсюда становится ясным почему возникло эффективное риманово пространство, а не какое-либо другое. Именно это обстоятельство даст нам возможность в разделе 3 сформулировать калибровочную группу, а затем построить плотность лагранжиана (4.24), удовлетворяющую согласно (Б.20) (см. приложение Б) условию (2.11).

Возникает интересная картина: движение вещества в пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ под действием гравитационного поля $\phi^{\mu\nu}$ тождественно движению вещества в эффективном римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$, определяемой из выражения (2.6). Такое взаимодействие гравитационного поля с веществом мы назвали п р и н ц и п о м г е о м е т р и з а ц и и. Принцип геометризации явился следствием исходного предположения о том, что источником гравитационного поля является универсальная характеристика материи — плотность тензора энергии-импульса. Такая структура плотности лагранжиана вещества свидетельствует о том, что реализуется уникальная возможность , когда гравитационное поле подключается в плотности лагранжиана вещества непосредственно к плотности тензора $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$.

Эффективное риманово пространство имеет в буквальном смысле слова полевое происхождение, обязанное присутствию гравитационного поля. Таким образом, причиной, что эффективное пространство риманово, а не какое-либо другое, является гипотеза, что источник гравитации есть универсальная сохраняющаяся величина — плотность тензора энергии-импульса материи. Поясним это фундаментальное свойство гравитационных сил на примере сравнения их с электромагнитными силами.

Как известно, движение заряженной частицы в пространстве Минковского для случая однородного магнитного поля, благодаря силе Лоренца, происходит по окружности в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля. Однако это движение далеко не одинаково даже для заряженных частиц, если отношение заряда к массе у них различно. Кроме того, существуют нейтральные частицы, а их траектории в магнитном поле вообще прямолинейны. Поэтому в силу неуниверсальности электромагнитных сил их действие нельзя свести к геометрии пространства-времени. Другое дело гравитация. Она универсальна, движения любых пробных тел происходят по траекториям, одинаковым при тождественных начальных условиях. В этом случае в силу гипотезы о плотности тензора энергии-импульса материи как источнике гравитационного поля удается описать эти траектории геодезическими линиями в эффективном римановом пространстве-времени, возникшем благодаря присутствию гравитационного поля в пространстве Минковского. В тех областях пространства, где имеется сколь угодно слабое гравитационное поле, мы имеем метрические свойства пространства, с большой точностью приближающиеся к непосредственно наблюдаемым свойствам псевдоевклидова пространства. Когда же гравитационные поля являются сильными, метрические свойства эффективного пространства становятся римановыми. Но и в этом случае псевдоевклидова геометрия не исчезает бесследно — она наблюдаема и проявляется в том, что движение тел в эффективном римановом пространстве не является свободным по инерции, а происходит с ускорением по отношению к псевдоевклидову пространству в галилеевых координатах. Именно поэтому ускорение в РТГ, в отличие от ОТО, имеет абсолютный смысл. Следовательно, "лифт Эйнштейна" не может быть инерциальной системой координат. Это проявится в том, что заряд, покоящийся в "лифте Эйнштейна", будет излучать электромагнитные волны. Данное физическое явление также должно свидетельствовать о наличии пространства Минковского. Как мы увидим далее, метрика пространства Минковского может быть определена на основании изучения распределения вещества и движения пробных тел и света в эффективном римановом пространстве. К этому вопросу мы вернемся в разделе 7.

В уравнение движения вещества не входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Пространство Минковского будет сказываться на движении вещества только через метрический тензор $g_{\mu\nu}$ риманова пространства, определяемый, как мы увидим далее, из уравнений гравитации, в которые входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Поскольку эффективная риманова метрика возникает на основе физического поля, заданного в пространстве Минковского, то уже отсюда следует, что эффективное риманово пространство имеет простую топологию и задается в одной карте. Если, например, вещество сосредоточено в области островного типа, то в галилеевых координатах инерциальной системы гравитационное поле $\tilde{\phi}^{\mu\nu}$ не может убывать медленнее, чем $1/r$, но это обстоятельство накладывает сильное ограничение на асимптотическое поведение метрики $g_{\mu\nu}$ эффективной римановой геометрии

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{r}\right), \text{ здесь } \eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)\,. \qquad (2.13)$$

Если же исходить просто из римановой метрики, не предполагая, что она возникла из-за действия физического поля, то такие ограничения не возникают, поскольку асимптотика метрики $g_{\mu\nu}$ зависит даже от выбора трехмерных пространственных координат. Тогда как физические величины от выбора трехмерных пространственных координат в принципе не могут зависеть. В РТГ не возникает каких-либо ограничений на выбор системы координат. Координатная система может быть любой, лишь бы она осуществляла взаимнооднозначное соответствие для всех точек инерциальной системы координат пространства Минковского и обеспечивала выполнение неравенств

$$\gamma_{00} > 0,\ dl^2 = s_{ik} dx^i\, dx^k > 0\,(i, k = 1, 2, 3),$$

где

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}},$$

необходимых для введения понятий времени и пространственной длины.

В нашей теории гравитации геометрические характеристики риманова пространства возникают как полевые величины в пространстве Минковского, а поэтому их трансформационные свойства становятся тензорными, тогда как ранее, в обычном понимании, они таковыми не были. Так, например, символы Кристоффеля, заданные как полевые величины в галилеевых координатах пространства Минковского, уже являются тензорами третьего ранга. Аналогично обычные производные в декартовых координатах пространства Минковского от тензорных величин также являются тензорами.

Может возникнуть вопрос: почему бы и в ОТО не использовать разделение метрики в форме (2.6), введя понятие гравитационного поля в пространстве Минковского? В уравнения Гильберта–Эйнштейна входит только величина $g_{\mu\nu}$, а следовательно, нельзя однозначно сказать, с помощью какой метрики $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского мы должны определить согласно (2.6) гравитационное поле. Но трудность не только в этом, а и в том, что решения уравнений Гильберта–Эйнштейна в общем случае находят не в одной карте, а в атласе карт. Такие решения для $g_{\mu\nu}$ описывают риманово пространство со сложной топологией, тогда как римановы пространства, получаемые с помощью представления гравитационного поля в пространстве Минковского, описываются в одной карте и имеют простую топологию. Именно по этим причинам полевые представления не совместимы с ОТО, поскольку они весьма жесткие. Но это означает, что никакой полевой формулировки ОТО в пространстве Минковского, в принципе, не может быть, как бы и кому бы этого не захотелось. Аппарат римановой геометрии предрасположен к возможности введения ковариантных производных в пространстве Минковского, чем мы и воспользовались при построении РТГ. Но чтобы это осуществить, потребовалось ввести метрику пространства Минковского в гравитационные уравнения, и тем самым удалось осуществить функциональную связь метрики риманова пространства $g_{\mu\nu}$ с метрикой пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$. Но на этом мы подробно остановимся в последующих разделах.

3. Калибровочная группа преобразований

Поскольку плотность лагранжиана вещества имеет вид

$$L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A), \tag{3.1}$$

то легко найти калибровочную группу преобразований, при которых плотность лагранжиана вещества меняется только на дивергенцию. Для этой цели воспользуемся инвариантностью действия

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A)\, d^4x \tag{3.2}$$

при произвольном бесконечно малом изменении координат

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x), \tag{3.3}$$

где ξ^α — бесконечно малый четырехвектор смещения. При этих координатных преобразованиях полевые функции $\tilde{g}^{\mu\nu}$, ϕ_A изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{g}'^{\mu\nu}(x') &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \xi^\alpha(x) D_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ \phi'_A(x') &= \phi_A(x) + \delta_\xi \phi_A(x) + \xi^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где выражения

$$\begin{aligned} \delta_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}^{\mu\alpha} D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha} D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_\xi \phi_A(x) &= -\xi^\alpha(x) D_\alpha \phi_A(x) + F^{B;\alpha}_{A;\beta}\, \phi_B(x) D_\alpha \xi^\beta(x) \end{aligned} \tag{3.5}$$

являются вариациями Ли.

Операторы δ_ξ удовлетворяют условиям алгебры Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}](\cdot) = \delta_{\xi_3}(\cdot) \tag{3.6}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\xi_1}, [\delta_{\xi_2}, \delta_{\xi_3}]] + [\delta_{\xi_3}, [\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]] + [\delta_{\xi_2}, [\delta_{\xi_3}, \delta_{\xi_1}]] = 0, \tag{3.7}$$

где

$$\xi_3^\nu = \xi_1^\mu D_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu D_\mu \xi_1^\nu = \xi_1^\mu \partial_\mu \xi_2^\nu - \xi_2^\mu \partial_\mu \xi_1^\nu.$$

Для того чтобы имело место (3.6), необходимо выполнение следующих условий:

$$F_{A;\nu}^{B;\mu}\, F_{B;\beta}^{C;\alpha} - F_{A;\beta}^{B;\alpha}\, F_{B;\nu}^{C;\mu} = f_{\nu\beta;\sigma}^{\mu\alpha;\tau}\, F_{A;\tau}^{C;\sigma}, \tag{3.8}$$

где структурные постоянные f равны

$$f_{\nu\beta;\sigma}^{\mu\alpha;\tau} = \delta_\beta^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\nu^\tau - \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\mu \delta_\beta^\tau. \tag{3.9}$$

Легко убедиться, что они удовлетворяют тождеству Якоби

$$f_{\beta\mu;\tau}^{\alpha\nu;\sigma}\, f_{\sigma\epsilon;\delta}^{\tau\rho;\omega} + f_{\mu\epsilon;\tau}^{\nu\rho;\sigma}\, f_{\sigma\beta;\delta}^{\tau\alpha;\omega} + f_{\epsilon\beta;\tau}^{\rho\alpha;\sigma}\, f_{\sigma\mu;\delta}^{\tau\nu;\omega} = 0 \tag{3.10}$$

и обладают свойством антисимметрии:

$$f_{\beta\mu;\sigma}^{\alpha\nu;\rho} = -f_{\mu\beta;\sigma}^{\nu\alpha;\rho}.$$

При координатном преобразовании (3.3) вариация действия равна нулю:

$$\delta_c S_M = \int\limits_{\Omega'} L'_M(x')\, d^4x' - \int\limits_{\Omega} L_M(x)\, d^4x = 0. \tag{3.11}$$

Первый интеграл в (3.11) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega'} L'_M(x')\, d^4x' = \int\limits_{\Omega} J\, L'_M(x')\, d^4x,$$

где

$$J = \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

В первом порядке по ξ^α детерминант J

$$J = 1 + \partial_\alpha \xi^\alpha(x). \tag{3.12}$$

Учитывая разложение

$$L'_M(x') = L'_M(x) + \xi^\alpha(x) \frac{\partial L_M}{\partial x^\alpha},$$

а также (3.12), выражение для вариации можно представить в форме

$$\delta_c S_M = \int\limits_{\Omega} \left[\delta L_M(x) + \partial_\alpha(\xi^\alpha L_M(x))\right] d^4x = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования Ω имеем тождество

$$\delta\, L_M(x) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x) L_M(x)), \tag{3.13}$$

где вариация Ли δL_M

$$\delta\; L_M(x) = \frac{\partial L_M}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}\,\delta\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})}\,\delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) +$$

$$+ \frac{\partial L_M}{\partial \phi_A}\,\delta\phi_A + \frac{\partial L_M}{\partial(\partial_\alpha \phi_A)}\,\delta(\partial_\alpha \phi_A). \tag{3.14}$$

Отсюда, в частности, следует, что если скалярная плотность зависит только от $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и ее производных, то при преобразовании (3.5) она также изменится только на дивергенцию

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = -\partial_\alpha(\xi^\alpha(x)\, L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x))), \tag{3.13a}$$

где вариация Ли δL

$$\delta L(\tilde{g}^{\mu\nu}(x)) = \frac{\partial L}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}\,\delta\tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu})}\,\delta(\partial_\alpha \tilde{g}^{\mu\nu}) +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \tilde{g}^{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha \partial_\beta \tilde{g}^{\mu\nu}). \tag{3.14a}$$

Вариации Ли (3.5) были установлены в контексте координатных преобразований (3.3). Однако возможна и другая точка зрения, согласно которой преобразования (3.5) можно рассматривать как калибровочные преобразования. В этом случае произвольный бесконечно малый четырехвектор $\xi^\alpha(x)$ будет уже калибровочным вектором, а не вектором смещения координат. В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие калибровочной группы от группы координатных преобразований, для группового параметра мы будем использовать обозначение $\varepsilon^\alpha(x)$, а преобразование полевых функций

$$\begin{aligned} &\tilde{g}^{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \delta\tilde{g}^{\mu\nu}(x), \\ &\phi_A(x) \to \phi_A(x) + \delta\phi_A(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

с приращениями

$$\begin{aligned} &\delta_\varepsilon\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha}D_\alpha\varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha}D_\alpha\varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha\tilde{g}^{\mu\nu}), \\ &\delta_\varepsilon\phi_A(x) = -\varepsilon^\alpha(x)D_\alpha\phi_A(x) + F_{A;\beta}^{B;\alpha}\,\phi_B(x)\,D_\alpha\,\varepsilon^\beta(x) \end{aligned} \tag{3.16}$$

будем называть **калибровочными преобразованиями**.

В полном соответствии с формулами (3.6) и (3.7) операторы удовлетворяют той же алгебре Ли, т.е. коммутационному соотношению

$$[\delta_{\varepsilon_1},\, \delta_{\varepsilon_2}](\cdot) = \delta_{\varepsilon_3}(\cdot) \tag{3.17}$$

и тождеству Якоби

$$[\delta_{\varepsilon_1}, [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_3}]] + [\delta_{\varepsilon_3}, [\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]] + [\delta_{\varepsilon_2}, [\delta_{\varepsilon_3}, \delta_{\varepsilon_1}]] = 0. \tag{3.18}$$

Здесь аналогично предыдущему имеем

$$\varepsilon_3^\nu = \varepsilon_1^\mu D_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu D_\mu \varepsilon_1^\nu = \varepsilon_1^\mu \partial_\mu \varepsilon_2^\nu - \varepsilon_2^\mu \partial_\mu \varepsilon_1^\nu.$$

Калибровочная группа возникла из геометризованной структуры скалярной плотности $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A)$, описывающей взаимодействие вещества и гравитационного поля, которая в силу тождества (3.13) изменяется только на дивергенцию при калибровочных преобразованиях (3.16). Таким образом, принцип геометризации, который определил универсальный характер взаимодействия вещества и гравитационного поля, дал нам возможность сформулировать некоммутативную бесконечномерную калибровочную группу (3.16).

Существенная разница между калибровочными и координатными преобразованиями проявится в решающем месте в теории при построении скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля. Разница возникает из-за того, что при калибровочном преобразовании метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, в силу (2.6) имеем

$$\delta_\varepsilon \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x).$$

На основании (3.16) следует преобразование для поля

$$\delta_\varepsilon \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\alpha}\, D_\alpha\, \varepsilon^\nu(x) + \tilde{g}^{\nu\alpha}\, D_\alpha\, \varepsilon^\mu(x) - D_\alpha(\varepsilon^\alpha\, \tilde{g}^{\mu\nu}),$$

но это преобразование существенно отличается от его преобразования при смещении координат:

$$\delta_\xi\, \tilde{\phi}^{\mu\nu}(x) = \tilde{\phi}^{\mu\alpha}\, D_\alpha \xi^\nu(x) + \tilde{\phi}^{\nu\alpha}\, D_\alpha \xi^\mu(x) - D_\alpha(\xi^\alpha\, \tilde{\phi}^{\mu\nu}).$$

При калибровочных преобразованиях (3.16) уравнения движения для вещества остаются неизменными, поскольку при любых таких преобразованиях плотность лагранжиана вещества изменяется только на дивергенцию.

4. Плотность лагранжиана и уравнения движения для собственно гравитационного поля

Как известно, используя только тензор $g_{\mu\nu}$, невозможно построить скалярную плотность лагранжиана собственно гравитационного поля относительно произвольных координатных преобразований в виде квадратичной формы производных не выше первого порядка. Поэтому в такую плотность лагранжиана будет обязательно входить наряду с метрикой $g_{\mu\nu}$ также и метрика $\gamma_{\mu\nu}$. Но, так как при калибровочном преобразовании (3.16) метрика $\gamma_{\mu\nu}$ не изменяется, следовательно, чтобы при этом преобразовании плотность лагранжиана собственно гравитационного поля изменялась только на дивергенцию, должны возникнуть сильные ограничения на ее структуру. Именно здесь и возникает принципиальная разница между калибровочным и координатным преобразованиями.

В то время как координатные преобразования не накладывают почти никаких ограничений на структуру скалярной плотности лагранжиана собственно гравитационного поля, калибровочные преобразования позволят нам найти плотность лагранжиана. Прямой общий метод построения лагранжиана приведен в монографии [10].

Изберем более простой метод построения лагранжиана. На основании (3.13а) заключаем, что простейшие скалярные плотности $\sqrt{-g}$ и $\tilde{R} = \sqrt{-g}R$, где R — скалярная кривизна эффективного риманова пространства, при калибровочном преобразовании (3.16) изменяются следующим образом:

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{-g} - D_\nu(\varepsilon^\nu \sqrt{-g}), \tag{4.1}$$

$$\tilde{R} \to \tilde{R} - D_\nu(\varepsilon^\nu \tilde{R}). \tag{4.2}$$

Скалярная плотность $\tilde{R}$ выражается через символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}\, g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}\, g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}\, g_{\mu\nu}) \tag{4.3}$$

следующим образом:

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\, \Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\, \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}) - \partial_{\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}\, \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\, \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}). \tag{4.4}$$

Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорными величинами, каждое слагаемое в (4.4) не является скалярной плотностью. Однако, если ввести тензорные величины $G^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$G^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}(D_{\mu} g_{\sigma\nu} + D_{\nu} g_{\sigma\mu} - D_{\sigma} g_{\mu\nu}), \tag{4.5}$$

то скалярную плотность можно тождественно записать в виде

$$\tilde{R} = -\tilde{g}^{\mu\nu}(G^{\lambda}_{\mu\nu}\, G^{\sigma}_{\lambda\sigma} - G^{\lambda}_{\mu\sigma}\, G^{\sigma}_{\nu\lambda}) - D_{\nu}(\tilde{g}^{\mu\nu}\, G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\, G^{\nu}_{\mu\sigma}). \tag{4.6}$$

Заметим, что в (4.6) каждая группа членов в отдельности ведет себя при произвольных координатных преобразованиях как скалярная плотность. Мы видим, что аппарат римановой геометрии предрасположен к введению вместо обычных производных ковариантных в пространстве Минковского, однако метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, с помощью которого определяются ковариантные производные, при этом никак не фиксируется.

Учитывая (4.1) и (4.2), выражение

$$\lambda_1(\tilde{R} + D_{\nu}\, Q^{\nu}) + \lambda_2\sqrt{-g} \tag{4.7}$$

при произвольных калибровочных преобразованиях изменяется только на дивергенцию. Выбирая векторную плотность Q^{ν} равной

$$Q^{\nu} = \tilde{g}^{\mu\nu}\, G^{\sigma}_{\mu\sigma} - \tilde{g}^{\mu\sigma}\, G^{\nu}_{\mu\sigma},$$

мы исключаем из предыдущего выражения члены с производными выше первого порядка и получаем следующую плотность лагранжиана:

$$-\lambda_1 \tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}G^\sigma_{\nu\lambda}) + \lambda_2\sqrt{-g}. \tag{4.8}$$

Таким образом, мы видим, что требование, чтобы плотность лагранжиана собственно гравитационного поля при калибровочном преобразовании (3.16) изменялась только на дивергенцию, однозначно определяет структуру плотности лагранжиана (4.8). Но если ограничиться только этой плотностью, тогда уравнения гравитационного поля будут калибровочно инвариантными, а метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$ не войдет в систему уравнений, определяемых плотностью лагранжиана (4.8). Поскольку в таком подходе исчезает метрика пространства Минковского, то и исключается возможность представления гравитационного поля как физического поля типа Фарадея–Максвелла в пространстве Минковского.

При плотности лагранжиана (4.8) введение метрики $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью уравнений (2.3) не спасает положение, поскольку физические величины — интервал и тензор кривизны риманова пространства, а также тензор $t^{\mu\nu}_g$ гравитационного поля — будут зависеть от выбора калибровки, что физически недопустимо. Так, например,

$$\begin{aligned}
&\delta_\epsilon R_{\mu\nu} = -R_{\mu\sigma}D_\nu\epsilon^\sigma - R_{\nu\sigma}D_\mu\epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu}\ ,\\
&\delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\sigma\nu\alpha\beta}D_\mu\epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta}D_\nu\epsilon^\sigma -\\
&- R_{\mu\nu\sigma\beta}D_\alpha\epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\alpha\sigma}D_\beta\epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы сохранить представления о поле в пространстве Минковского и исключить такую неоднозначность, необходимо добавить в плотность лагранжиана гравитационного поля член, нарушающий калибровочную группу. Именно здесь появляется принципиально новый путь, который долгое время ускользал из поля зрения. На первый взгляд, может показаться, что здесь возникает большой произвол в выборе плотности лагранжиана гравитационного поля, так как нарушить группу можно весьма различными способами. Однако оказывается, что это не так, поскольку наше физическое требование на поляризационные свойства гравитационного поля как поля со спинами 2 и 0, накладываемое уравнениями (2.3), приводит к тому, что член, нарушающий группу (3.16), должен быть выбран таким образом, чтобы уравнения (2.3) являлись следствиями системы уравнений гравитационного поля и полей вещества, ибо только в этом случае у нас не возникает переопределенная система дифференциальных уравнений. Для этой цели в скалярную плотность лагранжиана гравитационного поля введем член вида

$$\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{4.9}$$

который при наличии условий (2.3) и при преобразованиях (3.16) изменяется также на дивергенцию для векторов, удовлетворяющих условию

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu \varepsilon^\sigma(x) = 0. \tag{4.10}$$

Почти аналогичная ситуация имеет место в электродинамике с массой покоя фотона, отличной от нуля. С учетом (4.8), (4.9) общая скалярная плотность лагранжиана имеет вид

$$\begin{aligned} L_g = &-\lambda_1\tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu}\,G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma}\,G^\sigma_{\nu\lambda}) + \\ &+ \lambda_2\sqrt{-g} + \lambda_3\,\gamma_{\mu\nu}\,\tilde{g}^{\mu\nu} + \lambda_4\sqrt{-\gamma}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Последний постоянный член в (4.11) мы ввели, чтобы с его помощью обратить в нуль плотность лагранжиана при отсутствии гравитационного поля. Сужение класса калибровочных векторов из-за введения члена (4.9) автоматически приводит к тому, что уравнения (2.3) будут следствиями уравнений гравитационного поля. В этом мы непосредственно убедимся ниже.

Согласно принципу наименьшего действия, уравнения для собственного гравитационного поля имеют вид

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \lambda_1 R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda_2 g_{\mu\nu} + \lambda_3 \gamma_{\mu\nu} = 0, \qquad (4.12)$$

здесь

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{\partial L_g}{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma \tilde{g}^{\mu\nu})}\right),$$

где $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи приведем к форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda G^\lambda_{\mu\nu} - D_\mu G^\lambda_{\nu\lambda} + G^\sigma_{\mu\nu} G^\lambda_{\sigma\lambda} - G^\sigma_{\mu\lambda} G^\lambda_{\nu\sigma}. \qquad (4.13)$$

Поскольку в случае отсутствия гравитационного поля уравнения (4.12) должны тождественно выполняться, отсюда следует

$$\lambda_2 = -2\lambda_3. \qquad (4.14)$$

Найдем теперь плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в пространстве Минковского

$$t_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = 2\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta})\,\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} +$$
$$+\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4\,\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \qquad (4.15)$$

где

$$J^{\mu\nu} = D_\alpha D_\beta(\gamma^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu} + \gamma^{\alpha\nu}\tilde{g}^{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta}\,\tilde{g}^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu}\,\tilde{g}^{\alpha\beta}). \qquad (4.16)$$

(см. приложение Б (Б.19)). Если в выражении (4.15) учесть динамические уравнения (4.12), то мы получим уравнения для собственно гравитационного поля в форме

$$\lambda_1 J^{\mu\nu} - 2\lambda_3\tilde{g}^{\mu\nu} - \lambda_4\,\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = t_g^{\mu\nu}. \qquad (4.17)$$

Для того чтобы это уравнение в случае отсутствия гравитационного поля удовлетворялось тождественно, необходимо положить

$$\lambda_4 = -2\lambda_3. \qquad (4.18)$$

Поскольку для собственно гравитационного поля всегда имеет место равенство

$$D_\mu t_g^{\mu\nu} = 0, \tag{4.19}$$

из уравнения (4.17) следует

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{4.20}$$

Таким образом, уравнения (2.3), определяющие поляризационные состояния поля, непосредственно вытекают из уравнений (4.17). С учетом выражения (4.20) полевые уравнения (4.17) можно записать в виде

$$\gamma^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \tag{4.21}$$

В галилеевых координатах это уравнение имеет простой вид

$$\square \tilde{\phi}^{\mu\nu} - \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\lambda_1} t_g^{\mu\nu}. \tag{4.22}$$

Числовому фактору $-\frac{\lambda_4}{\lambda_1} = m^2$ естественно придать смысл квадрата массы гравитона, а значение $-1/\lambda_1$, согласно принципу соответствия, необходимо взять равным 16π. Таким образом, все неизвестные постоянные, входящие в плотность лагранжиана, определены:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{16\pi}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -2\lambda_3 = \frac{m^2}{16\pi}. \tag{4.23}$$

Построенная скалярная плотность лагранжиана собственно гравитационного поля будет иметь вид

$$L_g = \frac{1}{16\pi} \tilde{g}^{\mu\nu}(G^\lambda_{\mu\nu} G^\sigma_{\lambda\sigma} - G^\lambda_{\mu\sigma} G^\sigma_{\nu\lambda}) - \\ - \frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right). \tag{4.24}$$

Соответствующие ей динамические уравнения для собственно гравитационного поля могут быть записаны в форме

$$J^{\mu\nu} - m^2\, \tilde{\phi}^{\mu\nu} = -16\pi\, t_g^{\mu\nu}, \tag{4.25}$$

или

$$R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}) = 0. \tag{4.26}$$

Эти уравнения существенно ограничивают класс калибровочных преобразований, оставляя лишь тривиальные, удовлетворяющие условиям Киллинга в пространстве Минковского. Такие преобразования являются следствием лоренцевой инвариантности и имеют место в любой теории.

Построенная выше плотность лагранжиана приводит к уравнениям (4.26), из которых следует, что уравнения (4.20) являются их следствиями, а поэтому вне вещества мы будем иметь десять уравнений для десяти неизвестных полевых функций. С помощью (4.20) неизвестные полевые функции $\phi^{0\alpha}$ легко выражаются через полевые функции ϕ^{ik}, где индексы i и k пробегают значения 1, 2, 3.

Таким образом, в плотности лагранжиана собственно гравитационного поля структура массового члена, нарушающего калибровочную группу, однозначно определяется поляризационными свойствами гравитационного поля. **Полевой подход к гравитации с объявлением источником поля тензора энергии-импульса всей материи с необходимостью требует введения в теорию массы покоя гравитона.**

5. Уравнения движения для гравитационного поля и вещества

Полная плотность лагранжиана вещества и гравитационного поля

$$L = L_g + L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A), \tag{5.1}$$

где L_g определяется выражением (4.24).

На основании (5.1) с помощью принципа наименьшего действия получим полную систему уравнений для гравитационного поля и вещества:

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0, \tag{5.2}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} = 0. \tag{5.3}$$

Поскольку при произвольном бесконечно малом изменении координат вариация действия $\delta_c S_M$ равна нулю,

$$\delta_c S_M = \delta_c \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A)\, d^4x = 0,$$

отсюда можно получить тождество (см. приложение В (В.16)) в форме

$$g_{\mu\nu} \nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = -D_\nu \left(\frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} F^{B;\nu}_{A;\mu}\, \phi_B(x) \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \phi_A} D_\mu\, \phi_A(x). \tag{5.4}$$

Здесь $T^{\lambda\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}}$ — плотность тензора вещества в римановом пространстве; ∇_λ — ковариантная производная в этом пространстве с метрикой $g_{\lambda\nu}$. Из тождества (5.4) следует, что если выполняются уравнения движения вещества (см. (5.3)), то имеет место уравнение

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{5.5}$$

В том случае, если число уравнений (5.3) для вещества равно четырем, вместо них можно использовать эквивалентные им уравнения (5.5). Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с такими уравнениями для вещества, всегда можно пользоваться уравнениями для вещества в форме (5.5). Таким образом, полная система уравнений для гравитационного поля и вещества будет иметь вид

$$\frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = 0\ , \tag{5.6}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{5.7}$$

Вещество будет описываться скоростью $\vec{v}$, плотностью ρ и давлением p. Гравитационное поле определяется десятью компонентами тензора $\phi^{\mu\nu}$.

Итак, мы имеем 15 неизвестных. Для их определения необходимо к 14-ти уравнениям (5.6), (5.7) добавить уравнение состояния вещества. Если принять во внимание соотношения (см. приложение Б* (Б*.18), (Б*.19))

$$\frac{\delta L_g}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{32\pi}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}), \tag{5.8}$$

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\Big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T\Big), \tag{5.9}$$

то систему уравнений (5.6), (5.7) можно представить в форме

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R) + \frac{m^2}{2}[g^{\mu\nu} + (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \\ - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta})\,\gamma_{\alpha\beta}] = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\, T^{\mu\nu}, \tag{5.10}$$

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\nu} = 0. \tag{5.11}$$

В силу тождества Бьянки

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R) = 0$$

из уравнений (5.10) имеем

$$m^2\sqrt{-g}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta}=16\pi\nabla_\mu T^{\mu\nu}. \quad (5.12)$$

Учитывая выражение

$$\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta}=-G^\sigma_{\mu\alpha}\gamma_{\sigma\beta}-G^\sigma_{\mu\beta}\gamma_{\sigma\alpha}, \quad (5.13)$$

где $G^\sigma_{\mu\alpha}$ определено формулой (4.5), найдем

$$(g^{\mu\alpha}\ g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta}=$$
$$=\gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}(D_\sigma g^{\sigma\lambda}+G^\beta_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda}), \quad (5.14)$$

но так как (см. формулу (Б*.20))

$$\sqrt{-g}(D_\sigma g^{\sigma\lambda}+G^\beta_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda})=D_\sigma\tilde{g}^{\lambda\sigma}, \quad (5.15)$$

выражение (5.14) принимает вид

$$\sqrt{-g}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\nabla_\mu\gamma_{\alpha\beta}=\gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}D_\sigma\tilde{g}^{\lambda\sigma}. \quad (5.16)$$

С помощью (5.16) выражение (5.12) может быть представлено в форме

$$m^2\gamma_{\mu\lambda}g^{\mu\nu}D_\sigma\tilde{g}^{\lambda\sigma}=16\pi\nabla_\mu T^{\mu\nu}.$$

Полученное выражение можно переписать в виде

$$m^2D_\sigma\tilde{g}^{\lambda\sigma}=16\pi\gamma^{\lambda\nu}\nabla_\mu T^\mu_\nu. \quad (5.17)$$

С помощью этого соотношения уравнение (5.11) можно заменить уравнением

$$D_\sigma\tilde{g}^{\nu\sigma}=0. \quad (5.18)$$

Поэтому система уравнений (5.10), (5.11) сводится к системе гравитационных уравнений

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\frac{m^2}{2}\Big[g^{\mu\nu}+(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-$$
$$-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\gamma_{\alpha\beta}\Big]=\frac{8\pi}{\sqrt{-g}}T^{\mu\nu}, \quad (5.19)$$

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}=0. \quad (5.20)$$

Эти уравнения общековариантны относительно произвольных координатных преобразований и форминвариантны только относительно преобразований координат, оставляющих метрику Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$ форминвариантной. Отсюда, в частности, следует, что в любой инерциальной (галилеевой) системе координат явления описываются одинаковыми уравнениями. Уравнения с массой гравитона возникали и ранее, однако, из-за непонимания фундаментального факта, что специальная теория относительности справедлива и в неинерциальных системах координат, они серьезно не рассматривались, поскольку были не общековариантными. Обычно, следуя Эйнштейну, считали, что метрика $\eta_{\alpha\beta} = (1,-1,-1,-1)$ является тензором только относительно преобразований Лоренца. На самом же деле, метрика пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$ является тензором относительно произвольных координатных преобразований. Система уравнений (5.19), (5.20) — гиперболическая, а для статических задач — эллиптическая. Добавляя к системе уравнений (5.19), (5.20) уравнение состояния, мы получим полную систему уравнений для определения неизвестных физических величин $g_{\mu\nu}$, $\vec{v}$, ρ, p в той или иной постановке задачи.

Конкретная инерциальная галилеева система координат выделяется самой постановкой физической задачи (начальными и граничными условиями). Описание данной поставленной физической задачи в разных инерциальных (галилеевых) системах координат, конечно, различно, но это не противоречит принципу относительности. Если ввести тензор

$$N^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}[g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}], \;\; N = N^{\mu\nu}g_{\mu\nu},$$

то систему уравнений (5.19), (5.20) можно записать в форме

$$N^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}N = \frac{8\,\pi}{\sqrt{-g}}\,T^{\mu\nu}, \tag{5.19a}$$

$$D_\mu\,\tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{5.20a}$$

Она может быть представлена также в виде

$$N^{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T), \tag{5.21}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{5.22}$$

или

$$N_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \tag{5.21a}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{5.22a}$$

Следует особо подчеркнуть, что как в систему (5.21), так и в систему уравнений (5.22) входит метрический тензор пространства Минковского.

Преобразования координат, которые оставляют метрику пространства Минковского форминвариантной, связывают физически эквивалентные системы отсчета. Простейшими из них будут инерциальные системы. Поэтому возможные калибровочные преобразования, удовлетворяющие условиям Киллинга

$$D_\mu \varepsilon_\nu + D_\nu \varepsilon_\mu = 0,$$

не выводят нас из класса физически эквивалентных систем отсчета.

Остановимся на этом вопросе подробнее. Для этой цели запишем уравнения РТГ (5.21), (5.22) в развернутой форме:

$$R^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2}[g^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}(x)] =$$
$$= 8\pi\left[T^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T(x)\right], \tag{5.23}$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \tag{5.24}$$

Пусть, при соответствующих условиях задачи, в инерциальной системе в галилеевых координатах x эти уравнения имеют решение $g^{\mu\nu}(x)$ при распределении вещества $T^{\mu\nu}(x)$.

В другой инерциальной системе в галилеевых координатах x', удовлетворяющих условию

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + \epsilon^{\nu}(x),$$
$$D^{\mu}\epsilon^{\nu} + D^{\nu}\epsilon^{\mu} = 0. \tag{5.25}$$

С помощью тензорных преобразований получим

$$R'^{\mu\nu}(x') - \frac{m^2}{2}[g'^{\mu\nu}(x') - g'^{\mu\alpha}g'^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}(x')] =$$
$$= 8\pi\left[T'^{\mu\nu}(x') - \frac{1}{2}g'^{\mu\nu}T'(x')\right]. \tag{5.26}$$

Поскольку уравнения (5.23) форминвариантны относительно преобразований Лоренца, мы можем вернуться к исходным переменным x:

$$R'^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2}[g'^{\mu\nu}(x) - g'^{\mu\alpha}g'^{\nu\beta}\gamma_{\alpha\beta}(x)] =$$
$$= 8\pi\left[T'^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g'^{\mu\nu}T'(x)\right]. \tag{5.27}$$

Отсюда очевидно, что решение $g'^{\mu\nu}(x)$ соответствует не распределению вещества $T^{\mu\nu}(x)$, а другому распределению $T'^{\mu\nu}(x)$. В уравнениях (5.27) величина $g'^{\mu\nu}(x)$ равна

$$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \delta_{\epsilon}g^{\mu\nu}, \tag{5.28}$$

где

$$\delta_{\epsilon}g^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}D_{\lambda}\epsilon^{\nu} + g^{\nu\lambda}D_{\lambda}\epsilon^{\mu} - \epsilon^{\lambda}D_{\lambda}g^{\mu\nu}. \tag{5.29}$$

При преобразованиях (5.25) имеем

$$R'^{\mu\nu}(x) = R^{\mu\nu}(x) + \delta_{\epsilon}R^{\mu\nu},$$
$$T'^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) + \delta_{\epsilon}T^{\mu\nu}, \tag{5.30}$$
$$T'(x) = T(x) + \delta_{\epsilon}T.$$

Здесь

$$\delta_{\epsilon}R^{\mu\nu} = R^{\mu\lambda}D_{\lambda}\epsilon^{\nu} + R^{\nu\lambda}D_{\lambda}\epsilon^{\mu} - \epsilon^{\lambda}D_{\lambda}R^{\mu\nu},$$
$$\delta_{\epsilon}T^{\mu\nu} = T^{\mu\lambda}D_{\lambda}\epsilon^{\nu} + T^{\nu\lambda}D_{\lambda}\epsilon^{\mu} - \epsilon^{\lambda}D_{\lambda}T^{\mu\nu}, \tag{5.31}$$
$$\delta_{\epsilon}T = -\epsilon^{\lambda}D_{\lambda}T = -\epsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}T.$$

Мы получили выражение (5.27) с помощью координатных преобразований (5.25), но точно такие же уравнения получаются и при калибровочном преобразовании (5.29) с векторами ϵ^λ, удовлетворяющими условию (5.25). Таким образом, калибровочные преобразования приводят к метрическому полю $g'^{\mu\nu}(x)$ при распределении вещества $T'^{\mu\nu}(x)$. Хотя мы рассматривали переход от одной инерциальной системы в галилеевых координатах к другой, приведенные нами формулы (5.25), (5.31) имеют общий характер, они справедливы и для неинерциальной системы в пространстве Минковского. Точно такая же ситуация имеет место в электродинамике.

В ОТО положение совершенно иное, поскольку в силу форминвариантности уравнений Гильберта–Эйнштейна относительно произвольных преобразований координат при одном и том же распределении вещества $T^{\mu\nu}(x)$ существует какое угодно количество метрик $g_{\mu\nu}(x), g'_{\mu\nu}(x), \ldots$, удовлетворяющих уравнениям. Именно отсюда в ОТО возникает неоднозначность в описании гравитационных явлений.

Если мысленно допустить возможность экспериментального измерения характеристик риманова пространства и движения вещества со сколь угодно большой точностью, то на основании уравнений (5.21a), (5.22a) мы можем определить метрику пространства Минковского и найти галилеевы (инерциальные) системы координат. Таким образом, пространство Минковского является, в принципе, наблюдаемым.

Существование пространства Минковского находит отражение в законах сохранения, а поэтому экспериментальное исследование их является в то же время проверкой структуры пространства-времени.

Следует особо отметить, что как в систему уравнений (5.19), так и в систему уравнений (5.20) входит метрический тензор пространства Минковского. Как известно, в ОТО присутствие космологического члена в уравнениях не является обязательным, и этот вопрос обсуждается до сих пор. В РТГ наличие космологического члена в уравнениях гравитации обязательно. Однако космологический член возникает в уравнениях (5.19) в комбинации с членом, связанным с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского, причем с той же постоянной, равной половине квадрата массы гравитона. Наличие члена в уравнениях (5.19), связанного с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$, существенно изменяет характер коллапса и развития Вселенной. Согласно уравнениям (5.19), при отсутствии вещества и гравитационного поля метрика пространства становится метрикой Минковского, причем она точно совпадает с выбранной ранее при постановке физической задачи. Если бы в уравнениях гравитационного поля метрика пространства Минковского отсутствовала, то совершенно не было бы ясно, в какой системе координат пространства Минковского мы оказались при отсутствии вещества и гравитационного поля.

Масса покоя гравитона имеет принципиальное значение для данной теории, поскольку только с ее введением удается построить теорию гравитации в пространстве Минковского. Масса гравитона нарушает калибровочную группу или, иными словами, она снимает вырождение. Поэтому нельзя исключить возможность устремления массы гравитона к нулю в окончательных результатах при изучении гравитационных эффектов. Однако теория с массой гравитона и теория с нарушенной калибровочной группой [8] (с последующим устремлением массы гравитона к нулю) это, в принципе, разные теории. Так, например, если в первой имеет место однородная и изотропная Вселенная, то во второй такой Вселенной не может быть.

Остановимся теперь на принципе соответствия. Любая физическая теория должна удовлетворять принципу соответствия. Гравитационные взаимодействия изменяют уравнения движения вещества. Требование принципа соответствия сводится к тому, чтобы эти уравнения движения при выключении гравитационного взаимодействия, т.е.

при обращении в нуль тензора кривизны Римана, становились обычными уравнениями движения СТО в выбранной системе координат.

При постановке физической задачи в РТГ мы выбираем некоторую систему координат с метрическим тензором пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. В РТГ уравнение движения вещества в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, определяемом из уравнений гравитационного поля (5.19), (5.20), имеет вид

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{σ}$$

В качестве примера возьмем пылевидную материю с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, равным

$$T^{\mu\nu}(x) = \rho U^\mu U^\nu, \quad U^\nu = \frac{dx^\nu}{ds},$$

где ds — интервал в римановом пространстве.

На основании уравнений (σ), используя выражение для $T^{\mu\nu}$, найдем уравнение для геодезической линии в римановом пространстве

$$\frac{dU^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(x) U^\alpha U^\beta = 0.$$

При выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, из уравнений гравитационного поля (5.19), (5.20) следует, что риманова метрика $g_{\mu\nu}(x)$ переходит в ранее выбранную метрику пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$. При этом уравнение движения вещества (σ) принимает вид

$$D_\mu t^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{λ}$$

Здесь тензор энергии-импульса $t^{\mu\nu}(x)$ равен

$$t^{\mu\nu}(x) = \rho u^\mu u^\nu, \; u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma},$$

где $d\sigma$ — интервал в пространстве Минковского.

На основании (λ), используя выражение для $t^{\mu\nu}$, найдем уравнения для геодезической линии в пространстве Минковского

$$\frac{du^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0,$$

т.е. мы пришли к обычным уравнениям для свободного движения частиц в СТО в выбранной ранее координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$. Таким образом, уравнение движения вещества в гравитационном поле в выбранной координации автоматически переходит при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, в уравнение движения вещества в пространстве Минковского в той же координации с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}(x)$, значит принцип соответствия выполняется. Это утверждение в РТГ имеет общий характер, поскольку при обращении тензора Римана в нуль плотность лагранжиана вещества в гравитационном поле $L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ переходит в обычную плотность лагранжиана $L_M(\tilde{\gamma}^{\mu\nu}, \Phi_A)$ СТО в выбранной координации.

В ОТО уравнение движения вещества также имеет вид (σ). Но поскольку в уравнения Гильберта–Эйнштейна не входит метрический тензор пространства Минковского, то при выключении гравитационного взаимодействия, т.е. при обращении тензора кривизны Римана в нуль, нельзя сказать, в какой системе координат (инерциальной или неинерциальной) пространства Минковского мы находимся, а поэтому невозможно определить, какое уравнение движения вещества в данном пространстве мы получим при выключении гравитационного взаимодействия. Поэтому в ОТО принцип соответствия невозможно соблюсти, оставаясь в рамках этой теории. В ОТО это соответствие обычно достигается именно с помощью полевого подхода, когда слабое гравитационное поле рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского в галилеевых координатах. Таким образом в ОТО вносится то, что в ней в принципе не содержится, поскольку, как писал

А.Эйнштейн, "*гравитационные поля можно задавать, не вводя напряжений и плотности энергии*"[20], а поэтому в ОТО ни о каком физическом поле не может быть и речи.

В заключение отметим, что РТГ возвращает в физику все те понятия (инерциальная система координат, закон инерции, ускорение по отношению к пространству, законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения), имеющие место в классической механике Ньютона и в специальной теории относительности, от которых Эйнштейну пришлось отказаться при построении ОТО.

А.Эйнштейн в 1955 году писал: «*Существенное достижение общей теории относительности заключается в том, что она избавила физику от необходимости вводить "инерциальную систему" (или "инерциальные системы")*»[21]. Поля инерции и гравитации, с нашей точки зрения, даже локально нельзя отождествлять, поскольку они совершенно разной природы. Если первые можно устранить выбором системы координат, то поля гравитации никаким выбором системы координат устранить нельзя, даже локально. К сожалению, это обстоятельство многие не понимают до сих пор, поскольку не осознают, что "*в теории Эйнштейна*", как особенно подчеркивал Дж.Синг, "*в зависимости от того, отличен от нуля тензор кривизны Римана или равен нулю, гравитационное поле присутствует или отсутствует*"[22].

---

[20] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.47, с.627.

[21] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.146, с.854.

[22] Дж.Синг. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с.9.

6. Принцип причинности в РТГ

РТГ построена в рамках СТО подобно теориям других физических полей. Согласно СТО, любое движение какого-либо точечного пробного тела (в том числе и гравитона) всегда происходит внутри светового конуса причинности пространства Минковского. Следовательно, неинерциальные системы отсчета, реализуемые пробными телами, также должны находиться внутри конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Тем самым определяется весь класс возможных неинерциальных систем отсчета. Локальное равенство трехмерной силы инерции и гравитации при действии на материальную точку будет иметь место, если световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности пространства Минковского. Именно только в этом случае трехмерную силу гравитационного поля, действующую на пробное тело, можно локально скомпенсировать, перейдя в допустимую неинерциальную систему отсчета, связанную с этим телом.

Если бы световой конус эффективного риманова пространства выходил за пределы светового конуса причинности пространства Минковского, то это означало бы, что для такого "гравитационного поля" не существует допустимой неинерциальной системы отсчета, в которой это "силовое поле" при действии на материальную точку можно было бы скомпенсировать. Иными словами, локальная компенсация трехмерной силы гравитации силой инерции возможна лишь тогда, когда гравитационное поле как физическое поле, воздействуя на частицы, не выводит их мировые линии за пределы конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Данное условие следует рассматривать как принцип причинности, позволяющий отбирать решения системы уравнений (5.19) и (5.20), которые имеют физический смысл и соответствуют гравитационным полям.

Принцип причинности не выполняется автоматически. Но в этом нет ничего необычного, ибо и в электродинамике, да и в других физических теориях всегда добавляется (но не всегда отмечается) к основным уравнениям условие причинности для материи в форме $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \geq 0$, которое и обеспечивает невозможность движения любой формы материи со скоростями, большими, чем скорость света. В нашем случае мы должны учесть, что гравитация входит в коэффициенты при вторых производных в уравнениях поля, т.е. возникает эффективная геометрия пространства-времени. Эта особенность присуща только гравитационному полю. Взаимодействие всех других известных физических полей обычно не затрагивает вторых производных уравнений поля и поэтому не изменяет исходную псевдоевклидову геометрию пространства-времени.

Дадим теперь аналитическую формулировку принципа причинности в РТГ. Поскольку в РТГ движение вещества под действием гравитационного поля в псевдоевклидовом пространстве-времени эквивалентно движению вещества в соответствующем эффективном римановом пространстве-времени, то для причинно-связанных событий (мировых линий частиц и света), с одной стороны, мы должны иметь условие

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \;\geq\; 0, \tag{6.1}$$

а с другой — для таких событий должно обязательно выполняться неравенство

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \;\geq\; 0. \tag{6.2}$$

Для выбранной системы отсчета, реализуемой физическими телами, имеет место условие

$$\gamma_{00} > 0. \tag{6.3}$$

В выражении (6.2) мы выделим времени- и пространственноподобные части

$$d\sigma^2 = \left(\sqrt{\gamma_{00}}\,dt + \frac{\gamma_{0i}\,dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 - s_{ik}\,dx^i\,dx^k, \qquad (6.4)$$

здесь индексы i, k пробегают значения 1, 2, 3;

$$s_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}}, \qquad (6.5)$$

где s_{ik} является метрическим тензором трехмерного пространства в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Квадрат пространственного расстояния определяется выражением

$$dl^2 = s_{ik}\,dx^i\,dx^k. \qquad (6.6)$$

Представим скорость $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ в виде $v^i = ve^i$, где v — величина скорости, e^i — произвольный единичный вектор в трехмерном пространстве

$$s_{ik}e^i\,e^k = 1. \qquad (6.7)$$

При отсутствии гравитационного поля скорость света в выбранной системе координат легко определяется из выражения (6.4), полагая его равным нулю:

$$\left(\sqrt{\gamma_{00}}\,dt + \frac{\gamma_{0i}\,dx^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right)^2 = s_{ik}\,dx^i\,dx^k.$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\gamma_{00}}\Big/\left(1 - \frac{\gamma_{0i}\,e^i}{\sqrt{\gamma_{00}}}\right). \qquad (6.8)$$

Таким образом, произвольный четырехмерный изотропный вектор u^ν в пространстве Минковского имеет вид

$$u^\nu = (1,\, v\,e^i). \qquad (6.9)$$

Для одновременного выполнения условий (6.1), (6.2) необходимо и достаточно, чтобы для любого изотропного вектора

$$\gamma_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = 0 \tag{6.10}$$

выполнялось условие причинности

$$g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu \;\le\; 0, \tag{6.11}$$

которое и означает, что световой конус эффективного риманова пространства не выходит за пределы светового конуса причинности псевдоевклидова пространства-времени. Условия причинности можно записать в следующей форме:

$$g_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu = 0, \tag{6.10a}$$

$$\gamma_{\mu\nu} v^\mu\, v^\nu \;\ge\; 0. \tag{6.11a}$$

В ОТО физический смысл имеют такие решения уравнений Гильберта–Эйнштейна, которые удовлетворяют в каждой точке пространства-времени неравенству

$$g < 0,$$

а также требованию, называемому условием энергодоминантности, которое формулируется следующим образом. Для любого времениподобного вектора K_ν должно выполняться неравенство

$$T^{\mu\nu}\, K_\mu\, K_\nu \;\ge\; 0,$$

а величина $T^{\mu\nu}\, K_\nu$ для данного вектора K_ν должна образовывать непространственноподобный вектор.

В нашей теории физический смысл имеют такие решения уравнений (5.21a) и (5.22a), которые наряду с этими требованиями должны также удовлетворять условию причинности (6.10а), (6.11а). Последнее на основании уравнения (5.21а) можно записать в следующей форме:

$$R_{\mu\nu} K^\mu K^\nu \le \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) K^\mu K^\nu + \\ + \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu. \qquad (6.12)$$

Если плотность тензора энергии-импульса вещества взять в форме

$$T_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[(\rho + p)U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}],$$

то на основании (5.21а) можно установить между интервалами пространства Минковского $d\sigma$ и интервалом эффективного риманова пространства ds следующую связь:

$$\frac{m^2}{2} d\sigma^2 = ds^2[4\pi(\rho + 3p) + \frac{m^2}{2} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu],$$

здесь $U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$.

В силу принципа причинности имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu < 4\pi(\rho + 3p) + \frac{m^2}{2},$$

которое является частным случаем неравенства (6.12) или

$$\sqrt{-g} R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \le 8\pi T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu. \qquad (6.12а)$$

Рассмотрим теперь движение пробного тела под действием гравитации в ОТО и РТГ. А.Эйнштейн в 1918 году дал принципу эквивалентности следующую формулировку: «*Инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный "фундаментальный тензор" ($g_{\mu\nu}$) определяет метрические свойства пространства, движения тел по инерции в нем, а также* *и действие гравитации»*[23]. Отождествление в ОТО гравитационного поля с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ риманова пространства позволяет выбором системы координат сделать равными нулю все компоненты символа Кристоффеля во всех точках произвольной несамопересекающейся линии. Именно поэтому движение по геодезической в ОТО считается свободным. Но при этом и в ОТО гравитационное поле выбором системы координат не исключается, поскольку движение двух близких материальных точек не будет свободным из-за наличия тензора кривизны, который в силу тензорных свойств никогда нельзя обратить в нуль выбором системы координат.

В РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе Фарадея–Максвелла, а поэтому сила гравитации описывается четырехвектором, следовательно, путем выбора системы координат, только при выполнении условий (6.10) и (6.11) можно силами инерции уравновесить трехмерную часть силы гравитации, действующую на пробное тело. Движение же материальной точки в гравитационном поле никогда не может быть свободным. Последнее особенно очевидно, если уравнение геодезической линии записать в форме [41]

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = -G^\rho_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta(\delta^\nu_\rho - U^\nu U_\rho).$$

Здесь

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,\ U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}.$$

Свободное движение в пространстве Минковского описывается уравнением

$$\frac{DU^\nu}{d\sigma} = \frac{dU^\nu}{d\sigma} + \gamma^\nu_{\mu\lambda}U^\mu U^\lambda = 0,$$

[23] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.45, с.613.

где $\gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ — символы Кристоффеля пространства Минковского. Мы видим, что движение по геодезической линии риманова пространства является движением пробного тела под действием силы F^{ν}:

$$F^{\nu} = -G^{\rho}_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} (\delta^{\nu}_{\rho} - U^{\nu} U_{\rho}),$$

причем эта сила есть четырехвектор. Если бы пробное тело было заряженным, то излучало бы электромагнитные волны, поскольку оно движется с ускорением.

В СТО между силами инерции и физическими силами имеется принципиальная разница. Силы инерции всегда могут быть обращены в нуль простым выбором системы отсчета, тогда как физические силы ни каким выбором системы отсчета в принципе нельзя обратить в нуль, поскольку они имеют векторную природу в пространстве Минковского. Так как в РТГ все силы, в том числе и гравитационные, имеют векторную природу, то это означает, что они не могут быть обращены в нуль выбором системы координат. Выбором системы координат можно силой инерции скомпенсировать трехмерную силу, действующую на материальную точку, любой природы, в том числе и гравитационную. В ОТО, как отмечал Дж.Синг, "*... понятие силы гравитации отсутствует, так как гравитационные свойства органически входят в структуру пространства-времени и проявляются в кривизне пространства-времени, т.е. в том, что тензор Римана R_{ijkm} отличен от нуля*". Именно в этой связи Дж.Синг писал: "*Согласно знаменитой легенде, Ньютон был вдохновлен на создание своей теории гравитации, наблюдая однажды за падением яблока с ветки дерева, и изучающие ньютонову физику даже теперь стали бы утверждать, что ускорение (980 см/с^2) падающего яблока обусловлено гравитационным полем. Согласно теории относительности* (речь идет об ОТО. — *Прим. А.Л.*), *эта точка зрения совершенно ошибочна. Мы предпримем тщательное* *изучение этой проблемы и убедимся, что в явлении свободного падения гравитационное поле (т.е. тензор Римана) играет, в действительности, чрезвычайно малую роль, а ускорение 980 см/с^2 обусловлено фактически кривизной мировой линии ветки дерева"* [23].

Согласно РТГ, гравитационное поле является физическим полем, а поэтому, в отличие от ОТО, она полностью сохраняет понятие силы гравитации. Благодаря силе гравитации и происходит свободное падение тела, т.е. происходит все так, как это имеет место в ньютоновой физике. Более того, все гравитационные эффекты в Солнечной системе (смещение перигелия Меркурия, отклонение света Солнцем, временное запаздывание радиосигнала, прецессия гироскопа) вызваны именно действием силы гравитации, а не тензора кривизны пространства-времени, который в Солнечной системе достаточно мал.

В локальной тождественности инерции и гравитации Эйнштейн увидел главную причину равенства инертной и гравитационной масс. Однако, по нашему мнению, как это следует из уравнений (2.2), причина этого равенства заключается в том, что источником гравитационного поля является сохраняющаяся суммарная плотность тензора вещества и гравитационного поля. Именно поэтому равенство инертной и гравитационной масс не требует локального отождествления сил гравитации и инерции.

7. Принцип Маха

Ньютон при формулировке законов механики ввел понятие абсолютного пространства, которое остается всегда одинаковым и неподвижным. Именно по отношению к этому пространству он и определял ускорение тела. Это ускорение имело абсолютный характер. Введение такой абстракции, как абсолютное пространство, оказалось чрезвычайно плодотворным. Отсюда, в частности, возникли понятия инерциальных систем отсчета во всем пространстве, принцип относительности для механических процессов и сложилось представление о физически выделенных состояниях движения. Эйнштейн по этому поводу в 1923 году писал следующее: "*Системы координат, находящиеся в таких состояниях движения, отличаются тем, что сформулированные в этих координатах законы природы принимают наиболее простой вид.*" И далее: «*...согласно классической механике существует "относительность скорости", но не "относительность ускорения"*»[24].

Так утвердилось в теории представление об инерциальных системах отсчета, в которых материальные точки, не подвергающиеся действию сил, не испытывают ускорения и находятся в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения. Однако абсолютное пространство Ньютона или инерциальные системы отсчета введены, фактически, априорно в отрыве от характера распределения материи во Вселенной.

Мах проявил достаточную смелость, подвергнув серьезной критике основные положения механики Ньютона. Как он сам позднее писал, ему с большим трудом удалось опубликовать свои идеи. Хотя Мах и не построил физическую теорию, свободную от указанных им недостатков, но он

[24]А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.70, с.122.

оказал огромное влияние на ее развитие и привлек внимание ученых к анализу основных физических понятий.

Приведем ряд высказываний Маха, которые получили в литературе название "принципа Маха". "*Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое*". И далее: "*Вместо того, чтобы относить движущееся тело к пространству (к какой-нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к т е л а м мира, посредством которых только и можно о п р е д е л и т ь систему координат ...даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие только д в у х масс, н е в о з м о ж н о отвлечься от остального мира. ... Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно д р у г о г о тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение назвать а б с о л ю т н ы м, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения о т н о с и т е л ь н о неба неподвижных звезд*" [18].

Поэтому Мах писал: "*...нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством. Самый естественный подход настоящего естествоиспытателя таков: сначала рассматривать закон инерции как достаточно приближенный, соотнести его пространственно с неподвижным звездным небом, ... и затем следует ожидать поправок или развития наших знаний на основе дальнейшего опыта. Недавно Ланге опубликовал критическую статью, в которой он излагает, как можно было бы, согласно его принципам, ввести н о в у ю систему координат, если бы обычное грубое отнесение к неподвижному звездному небу оказалось больше непригодным вследствие более точных астрономических наблюдений. Между мной и Ланге нет разли-*

чия во мнениях относительно т е о р е т и ч е с к о й формальной ценности заключений Ланге, а именно, что в настоящее время неподвижное звездное небо является единственной п р а к т и ч е с к и пригодной системой отсчета, а также относительно метода определения новой системы отсчета посредством постепенных поправок" [18]. Далее Мах приводит высказывания С.Неймана: *"Так как все движения должны быть отнесены к системе альфа (системе инерции), она, очевидно, представляет некую косвенную связь между всеми процессами, происходящими во Вселенной, и, следовательно, содержит в себе, можно сказать, столь же загадочный, сколь и сложный универсальный закон"*. Мах по этому поводу замечает: *"Я думаю, что с этим согласится всякий"* [18].

Из высказываний Маха очевидно, что, поскольку речь идет о законе инерции, согласно которому по Ньютону *"...всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения..."*, то, естественно, встает вопрос об инерциальных системах отсчета и о их связи с распределением материи. Мах и его современники вполне ясно понимали, что такая связь должна иметь место в природе. Именно такой смысл далее и будет вкладываться в понятие "принцип Маха".

Мах писал: *"Хотя я и думаю, что астрономические наблюдения сделают необходимыми сначала лишь очень незначительные поправки, я все же допускаю, что закон инерции в той простой форме, которую ему придал Ньютон, имеет для нас, людей, лишь ограниченное и преходящее значение"* [18]. Как мы увидим далее, в этом Мах не оказался прав, он не дал математического оформления своей идеи, а поэтому весьма часто разные авторы вкладывают в принцип Маха свой смысл. Мы здесь пытаемся сохранить тот смысл, который вкладывал в него сам автор.

Пуанкаре, а позднее Эйнштейн обобщили принцип относительности на все физические явления. В формулировке Пуанкаре он звучит так: *"...принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет"* [40]. Применение этого принципа к электромагнитным явлениям привело Пуанкаре, а затем и Минковского к открытию псевдоевклидовой геометрии пространства-времени и тем самым еще в большей степени укрепило гипотезу о существовании инерциальных систем отсчета во всем пространстве. Такие системы отсчета являются физически выделенными, а поэтому ускорение относительно них имеет абсолютный смысл.

В общей теории относительности отсутствуют инерциальные системы отсчета во всем пространстве. Эйнштейн об этом в 1929 году писал: *"Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т.е. не только скорость, но и ускорение не имеет абсолютного смысла"*[25].

Принцип Маха в его формулировке в ОТО оказался невостребованным. Следует, однако, отметить, что представления об инерциальных системах отсчета во всем пространстве имеют достаточно весомую экспериментальную основу, поскольку, например, переходя от системы координат, связанной с Землей, к системе координат, связанной с Солнцем, а затем к Метагалактике, мы все с большей точностью приближаемся к инерциальной системе отсчета. Поэтому нет никаких серьезных оснований для отказа от такого важного понятия, как инерциальная система отсчета. С другой стороны, наличие фундаментальных законов сохранения энергии–импульса и момента количества движения также с необходимостью приводит к существованию инерциальных систем отсчета во всем

---

[25] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.92, с.264.

пространстве. Псевдоевклидова геометрия пространства-времени отражает общие динамические свойства материи и в то же время вводит инерциальные системы отсчета. Хотя псевдоевклидова геометрия пространства-времени возникла при изучении материи, а поэтому и неотделима от нее, тем не менее можно формально говорить о пространстве Минковского в отсутствии материи. Однако так же, как и ранее в механике Ньютона, в специальной теории относительности нет ответа на вопрос, как инерциальные системы отсчета связаны с распределением материи во Вселенной.

Открытие псевдоевклидовой геометрии пространства и времени позволило с единой точки зрения рассмотреть не только инерциальные, но и ускоренные системы отсчета. Большая разница проявилась между силами инерции и силами, вызванными физическими полями. Она состоит в том, что силы инерции всегда можно сделать равными нулю, путем выбора соответствующей системы отсчета, тогда как силы, вызванные физическими полями, в принципе, нельзя обратить в нуль выбором системы отсчета, так как они имеют векторную природу в четырехмерном пространстве-времени. Поскольку в РТГ гравитационное поле является физическим полем в духе поля Фарадея–Максвелла, силы, вызванные таким полем, не могут быть обращены в нуль выбором системы отсчета.

Основные уравнения РТГ (5.19), (5.20), благодаря наличию массы покоя гравитационного поля, содержат, наряду с римановой метрикой, также метрический тензор пространства Минковского, но это означает, что, в принципе, метрику этого пространства можно выразить через геометрические характеристики эффективного риманова пространства, а также через величины, характеризующие распределение вещества во Вселенной. Это легко осуществить, перейдя в уравнениях (5.19) от контравариантных величин к ковариантным. Таким путем мы получим

$$\frac{m^2}{2}\gamma_{\mu\nu}(x) = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}\,. \quad (7.1)$$

Отсюда мы видим, что в правой части уравнений содержатся только геометрические характеристики эффективного риманова пространства и величины, определяющие распределение вещества в этом пространстве.

Экспериментально изучая движения частиц, света в римановом пространстве, в принципе, можно найти метрический тензор пространства Минковского, а следовательно, и построить инерциальную систему отсчета. Таким образом, РТГ, построенная в рамках специальной теории относительности, позволяет установить связь инерциальной системы с распределением материи. Поэтому движение относительно пространства есть движение относительно вещества Вселенной. Наличие инерциальной системы координат, определяемой распределением материи, делает ускорение абсолютным. Мы видим, что специальный принцип относительности имеет всеобщее значение независимо от вида материи.

Для гравитационного поля его требования выражаются в условии форминвариантности уравнений (5.19), (5.20) относительно группы Лоренца. Форминвариантность физических уравнений относительно преобразований Лоренца остается важнейшим физическим принципом при построении теории, поскольку именно этот принцип дает возможность ввести универсальные характеристики для всех форм материи.

А. Эйнштейн в 1950 году писал: *"...не следует ли в конце концов попробовать сохранить понятие инерциальной системы, оставив все попытки объяснить фундаментальную черту гравитационных явлений, которая проявляет себя в системе Ньютона как эквивалентность* *инертной и тяготеющей масс?"*[26]. В РТГ сохранено понятие инерциальной системы и в то же время показано, что эквивалентность инертной и тяготеющей масс есть прямое следствие гипотезы, что сохраняющаяся плотность тензора энергии-импульса материи является источником гравитационного поля. Таким образом, равенство инертной и тяготеющей масс ни в коей мере не противоречит существованию инерциальной системы координат. Более того, эти положения органически дополняют друг друга и лежат в основе РТГ.

В противоположность нашему выводу Эйнштейн на поставленный им вопрос ответил следующим образом: "*Тот, кто верит в постижимость природы, должен дать ответ — нет*". Наличие инерциальных систем координат позволяет устранить парадокс Маха, ибо только в этом случае можно говорить об ускорении относительно пространства. В.А. Фок по этому поводу писал: «*Что касается парадокса Маха, то он основан, как известно, на рассмотрении вращающегося жидкого тела, имеющего форму эллипсоида, и невращающегося, имеющего форму шара. Парадокс возникает здесь только в том случае, если считать лишенным смысла понятие "вращение по отношению к пространству"; тогда действительно оба тела (вращающееся и невращающееся) представляются равноправными, и становится непонятным, почему одно из них шаровидно, а другое — нет. Но парадокс исчезает, коль скоро мы признаем законность понятия "ускорения по отношению к пространству"*»[27].

Идеи Маха оказали глубокое влияние на взгляды Эйнштейна на гравитацию при построении общей теории относительности. В одной из работ Эйнштейн пишет: "*Принцип Маха: G-поле полностью определено массами тел*".

---

[26]А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.137, с.724.

[27]В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961, с.499.

Но оказывается, что в ОТО и это положение не выполняется, поскольку имеются решения и в отсутствии материи. Попытка устранения этого обстоятельства путем введения λ-члена не дала желаемого результата. Оказалось, что и уравнения с λ-членом в отсутствии материи также имеют решения, отличные от нуля. Мы видим, что Эйнштейн вложил в понятие "принцип Маха" совсем другой смысл. Но и в таком понимании принцип Маха не нашел своего места в ОТО.

Имеет ли место принцип Маха в формулировке Эйнштейна в РТГ? В отличие от ОТО в этой теории в силу принципа причинности имеются пространственноподобные поверхности во всем пространстве (глобальные поверхности Коши). И если на одной из таких поверхностей вещество отсутствует, то на основании требования энергодоминантности, налагаемого на тензор вещества, оно будет отсутствовать всегда [26]. В разделе 10 будет показано, что без вещества гравитационное поле не может возникнуть.

Физический смысл имеют решения только системы неоднородных гравитационных уравнений, когда в какой-либо части пространства или во всем пространстве имеется вещество. Это означает, что гравитационное поле и эффективное риманово пространство не могут возникнуть без порождающего их вещества. Решение уравнений для метрики эффективного риманова пространства без вещества можно, например, рассматривать как предельный случай решения, полученного для однородного и изотропного распределения вещества в пространстве, при последующем стремлении плотности вещества к нулю. Мы видим, что и в формулировке Эйнштейна принцип Маха реализуется в релятивистской теории гравитации.

Имеется, однако, существенное различие в понимании G-поля в нашей теории и в ОТО. Под этим полем Эйнштейн понимал риманову метрику, тогда как в нашем представлении гравитационное поле есть физическое поле. Такое поле входит в риманову метрику наряду с плоской метрикой, а поэтому при отсутствии вещества и гравитационного поля она не исчезает, а остается метрикой пространства Минковского.

В литературе имеются и другие формулировки принципа Маха, отличные по смыслу от идей Маха и Эйнштейна, но поскольку они, по нашему мнению, не сформулированы достаточно определенно, мы их не рассматривали. Так как гравитационные силы в РТГ обязаны физическому полю типа Фарадея–Максвелла, то ни о какой единой сущности сил инерции и гравитации, в принципе, не может быть и речи.

Иногда суть принципа Маха видят в том, что, якобы, согласно ему силы инерции определяются взаимодействием с материей Вселенной. С полевой точки зрения, такой принцип не может иметь место в природе. Дело здесь в том, что, хотя инерциальные системы отсчета, как мы видели выше, связаны с распределением материи во Вселенной, силы инерции не являются результатом взаимодействия с материей Вселенной, поскольку всякое воздействие материи возможно только через физические поля, но это означает, что силы, вызванные этими полями, в силу их векторной природы нельзя обратить в нуль выбором системы отсчета. Таким образом, силы инерции, непосредственно определяются не физическими полями, а строго определенной структурой геометрии и выбором системы отсчета.

Псевдоевклидова геометрия пространства-времени, отражая динамические свойства, общие для всех форм материи, с одной стороны, подтвердила гипотезу о существовании инерциальных систем отсчета, а с другой стороны, показала, что силы инерции, возникающие при соответствующем выборе системы отсчета, выражаются через символы Кристоффеля пространства Минковского. Поэтому они не зависят от природы тела. Все это стало ясным, когда было показано, что специальная теория относительности применима не только в инерциальных системах отсчета, но и в неинерциальных (ускоренных).

Это позволило дать принципу относительности более общую формулировку: *"Какую бы физическую систему отсчета мы ни избрали (инерциальную или неинерциальную), всегда можно указать бесконечную совокупность других систем отсчета, таких, в которых все физические явления протекают одинаково с исходной системой отсчета, так что мы не имеем и не можем иметь никаких экспериментальных возможностей различить, в какой именно системе отсчета из этой бесконечной совокупности мы находимся"* [7]. Математически это выражается так: пусть в некоторой системе координат пространства Минковского интервал равен

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

тогда существует другая система координат x':

$$x'^\nu = f^\nu(x),$$

в которой интервал принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu,$$

где метрические коэффициенты $\gamma_{\mu\nu}$ имеют тот же функциональный вид, что и в исходной системе координат. В этом случае говорят, **что метрика форминвариантна** относительно таких преобразований, а все **физические уравнения также форминвариантны**, т.е. имеют одинаковый вид как в штрихованной, так и не в штрихованной системе координат. Преобразования координат, оставляющие метрику форминвариантной, образуют группу. В случае галилеевых координат в инерциальной системе это обычные преобразования Лоренца.

В РТГ между силами инерции и гравитации имеется существенное различие: по мере удаления от тел гравитационное поле становится достаточно слабым, тогда как силы инерции в зависимости от выбора системы отсчета могут быть сколь угодно большими. И только в инерциальной системе отсчета они равны нулю. Поэтому неправильно считать, что силы инерции нельзя отделить от сил гравитации. В повседневной жизни их различие почти очевидно.

Построение РТГ позволило установить связь инерциальной системы отсчета с распределением материи во Вселенной и тем самым глубже понять природу сил инерции и их различие с материальными силами. В нашей теории силам инерции отведена такая же роль, которую они играют в любых других полевых теориях.

8. Постньютоновское приближение

Для изучения гравитационных эффектов в Солнечной системе вполне достаточно постньютоновского приближения. В данном разделе мы построим это приближение. Наше построение в техническом плане использует многое, ранее полученное В.А.Фоком [24], при этом удается еще более упростить метод нахождения постньютоновского приближения.

Основные уравнения теории запишем в форме (см. приложение Г)

$$\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}+m^2\sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}=-16\pi g(T_M^{\epsilon\lambda}+\tau_g^{\epsilon\lambda}), \qquad (8.1)$$

$$D_\lambda\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}=0\,, \qquad (8.2)$$

где $T_M^{\epsilon\lambda}$ — тензор энергии-импульса вещества; $\tau_g^{\epsilon\lambda}$ — тензор энергии-импульса гравитационного поля.

Выражение для тензора энергии-импульса гравитационного поля может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
&-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}=\frac{1}{2}(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu})D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma}\times\\
&\times D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu}+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}-\\
&-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}+\\
&+D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha}-\tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}-m^2\Big(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}-\\
&-\sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}++\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\Big)\,. \qquad (8.3)
\end{aligned}$$

Это выражение записано в произвольной координатной системе в пространстве Минковского. В дальнейшем все вычисления будут проводиться в галилеевых координатах инерциальной системы

$$\gamma_{\mu\nu}=(1,-1,-1,-1)\,. \qquad (8.4)$$

При построении ряда теории возмущений в качестве малого параметра естественно использовать величину, равную

$$v \sim \epsilon,\ U \sim \epsilon^2,\ \Pi \sim \epsilon^2,\ p \sim \epsilon^2\ . \tag{8.5}$$

Здесь U — ньютонов потенциал гравитационного поля; Π — удельная внутренняя энергия тела; p — удельное давление. Для Солнечной системы параметр ϵ^2 имеет порядок

$$\epsilon^2 \sim 10^{-6}\ . \tag{8.6}$$

Будем исходить из разложений компонент плотности тензора:

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + ..., \tag{8.7}$$

$$\tilde{g}^{0i} = \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} + \overset{(5)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} + ..., \tag{8.8}$$

$$\tilde{g}^{ik} = \tilde{\gamma}^{ik} + \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} + \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} + ... \tag{8.9}$$

В качестве модели вещества возьмем идеальную жидкость, тензор энергии-импульса которой имеет вид

$$T^{\epsilon\lambda} = [p + \rho(1 + \Pi)]u^\epsilon u^\lambda - p g^{\epsilon\lambda}, \tag{8.10}$$

где ρ — инвариантная плотность идеальной жидкости; p — удельное изотропное давление; u^λ — четырехвектор скорости.

Напишем теперь разложение по малому параметру ϵ для тензора энергии-импульса вещества:

$$T_M^{00} = \overset{(0)}{T}{}^{00} + \overset{(2)}{T}{}^{00} + ..., \tag{8.11}$$

$$T_M^{0i} = \overset{(1)}{T}{}^{0i} + \overset{(3)}{T}{}^{0i} + ..., \tag{8.12}$$

$$T_M^{ik} = \overset{(2)}{T}{}^{ik} + \overset{(4)}{T}{}^{ik} + ... \tag{8.13}$$

В ньютоновом приближении, т.е. когда пренебрегаем силами гравитации, для четырехвектора скорости имеем

$$u^0 = 1 + 0(\epsilon^2),\ u^i = v^i(1 + 0(\epsilon^2))\ . \qquad (8.14)$$

Используя эти выражения в (8.10), найдем

$$\overset{(0)}{T}{}^{00} = \rho,\ \overset{(1)}{T}{}^{0i} = \rho v^i,\ \overset{(0)}{T}{}^{ik} = 0\ . \qquad (8.15)$$

В этом приближении на основании (5.7) имеем

$$\partial_0\rho + \partial_i(\rho v^i) = 0\ . \qquad (8.16)$$

Отсюда видно, что в ньютоновом приближении полная инертная масса тела является сохраняющейся величиной:

$$M = \int \rho d^3x\ . \qquad (8.17)$$

В ньютоновом приближении на основании уравнений (8.1) имеем

$$\Delta\ \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = -16\pi\rho\ , \qquad (8.18)$$

$$\Delta\ \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = -16\pi\rho v^i\ , \qquad (8.19)$$

$$\Delta\ \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} = 0\ . \qquad (8.20)$$

Масса гравитона, ввиду малости, в инерциальной системе координат для эффектов Солнечной системы не играет роль, а поэтому мы при получении уравнений (8.18) – (8.20) ее не учитывали. Хотя и в этом случае ее влияние сказалось в том, что наряду с системой уравнений (8.1) обязательно должны иметь место и уравнения (8.2). В теории гравитации Фока такие уравнения в галилеевых координатах также использовались, но они, в отличие от РТГ, не следовали из принципа наименьшего действия, а поэтому было неясно, почему именно их надо использовать, а не какие-либо другие. Фок их выбрал как координатные условия и применил для изучения островных систем. В РТГ эти уравнения возникают из принципа наименьшего действия, а поэтому они универсальны. Именно благодаря уравнениям (8.2), мы и получаем полную систему уравнений для определения физических величин. Следует отметить, что в общем случае неинерциальной системы отсчета или для сильных гравитационных полей член с массой гравитона m опускать уже нельзя. Так, например, даже для статического тела в области, близкой к сфере Шварцшильда, влияние массы гравитона весьма велико, поэтому пренебрегать ею уже невозможно.

Решение уравнений (8.18) – (8.20) имеет вид

$$\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 4U, \quad U = \int \frac{\rho}{|x - x'|}\, d^3x', \tag{8.21}$$

$$\overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = -4V^i, \quad V^i = -\int \frac{\rho v^i}{|x - x'|}\, d^3x' , \tag{8.22}$$

$$\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik} = 0 . \tag{8.23}$$

На основании уравнений (8.2) имеем

$$\partial_0 \overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} + \partial_i \overset{(3)}{\tilde{\Phi}}{}^{0i} = 0 . \tag{8.24}$$

Подставляя в это уравнение (8.21) и (8.22), находим

$$\partial_0 U - \partial_i V^i = 0 . \tag{8.25}$$

Отсюда очевидно, что при дифференцировании потенциала U по времени порядок малости по ϵ увеличивается. Это обстоятельство в дальнейшем нами будет использоваться при вычислениях тензора энергии-импульса гравитационного поля $\tau_g^{\epsilon\lambda}$. Заметим, что уравнение (8.25) тождественно выполняется в силу уравнений (8.16).

На основании (8.22), (8.23) следует, что из всех компонент плотности тензора $\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}$ во втором приближении остается только одна компонента $\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00}$, определяемая выражением (8.21). Именно это обстоятельство существенно упрощает метод нахождения постньютоновского приближения, когда мы на каждом этапе построения пользуемся плотностями тензорных величин.

Используя (8.21) – (8.23) с точностью до второго порядка включительно, получим

$$\sqrt{-g}g^{00} = 1 + 4U, \quad \sqrt{-g}g^{11} = \\ = \sqrt{-g}g^{22} = \sqrt{-g}g^{33} = -1 \ . \tag{8.26}$$

Отсюда имеем

$$-g = 1 + 4U \ , \tag{8.26a}$$

следовательно,

$$g_{00} = 1 - 2U, \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1 + 2U) \ . \tag{8.27}$$

Мы видим из (8.26), что в ньютоновом приближении, когда можно ограничиться только одной компонентой плотности тензора вещества T^{00}, как этого и следовало ожидать, гравитационное поле описывается только одной компонентой $\tilde{\Phi}^{00}$, тогда как метрический тензор $g_{\mu\nu}$ имеет и в этом приближении, согласно (8.27), несколько компонент. Работа с компонентами поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$, а не с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, в значительной степени упрощает весь вычислительный процесс построения постньютоновского приближения. Именно поэтому введение плотности тензора гравитационного поля $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ имеет не только общетеоретическое, но и практическое значение. Итак, метрический тензор эффективного риманова пространства равен

$$g_{00} = 1 - 2U, \ g_{0i} = 4\gamma_{ik}V^k, \ g_{ik} = \gamma_{ik}(1 + 2U) \ . \tag{8.28}$$

Из выражения (8.21) для U следует, что инертная масса (8.17) равна активной гравитационной массе. В РТГ, как мы видели, это равенство возникло из-за того, что источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса.

Перейдем теперь к построению следующего приближения для компоненты метрического тензора g_{00}. С этой целью найдем вклад от тензора энергии-импульса гравитационного поля. Поскольку в выражении (8.3) под знаком производной необходимо учитывать только $\overset{(2)}{\tilde{\Phi}}{}^{00}$, то первый член (8.3) даст вклад, равный

$$2(\operatorname{grad} U)^2, \tag{8.29}$$

а второй

$$-16(\operatorname{grad} U)^2. \tag{8.30}$$

Вклад от всех остальных членов в этом приближении будет равен нулю. Отброшены также члены с производными по времени от потенциала U, поскольку в силу (8.25) они также более высокого порядка малости по ϵ. На основании (8.29) и (8.30) имеем

$$-16\pi g \tau_g^{00} = -14(\operatorname{grad} U)^2 . \tag{8.31}$$

Используя (8.31), уравнение (8.1) в этом приближении для компоненты $\tilde{\Phi}^{00}$ принимает вид

$$\Delta \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 16\pi g T^{00} + 14(\operatorname{grad} U)^2 + 4\partial_0^2 U . \tag{8.32}$$

Поскольку на основании (8.28) во втором порядке по ϵ интервал равен

$$ds = dt(1 - U + \frac{1}{2}v_i v^i) , \tag{8.33}$$

отсюда получим

$$u^0 = \frac{dt}{ds} = 1 + \tilde{U} - \frac{1}{2}v_i v^i . \tag{8.34}$$

Подставляя это выражение в (8.10), находим

$$\overset{(2)}{T}{}^{00} = \rho[2U + \Pi - v_i v^i] \,. \tag{8.35}$$

На основании (8.26а) и (8.35) из уравнений (8.32) получим

$$\Delta \overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = -96\pi\rho U + 16\pi\rho v_i v^i + \\ +14(\operatorname{grad} U)^2 - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U \,. \tag{8.36}$$

Воспользуемся очевидным тождеством

$$(\operatorname{grad} U)^2 = \frac{1}{2}\Delta U^2 - U\Delta U \,. \tag{8.37}$$

Но поскольку

$$\Delta U = -4\pi\rho \,, \tag{8.38}$$

то уравнение (8.36), после использования (8.37) и (8.38), принимает вид

$$\Delta(\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} - 7U^2) = 16\pi\rho v_i v^i - 40\pi\rho U - 16\pi\rho\Pi + 4\partial_0^2 U \,. \tag{8.39}$$

Отсюда имеем

$$\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{00} = 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x' \,, \tag{8.40}$$

где

$$\Phi_1 = -\int \frac{\rho v_i v^i}{|x - x'|} d^3x', \quad \Phi_2 = \int \frac{\rho U}{|x - x'|} d^3x', \\ \Phi_3 = \int \frac{\rho\Pi}{|x - x'|} d^3x'. \tag{8.41}$$

Итак, в постньютоновом приближении находим

$$\tilde{g}^{00} = 1 + 4U + 7U^2 + 4\Phi_1 + 10\Phi_2 + \\ + 4\Phi_3 - \frac{1}{\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x'. \tag{8.42}$$

Нам необходимо теперь найти величину детерминанта g в постньютоновом приближении. Для этой цели представим $\tilde{g}^{ik}$ в форме

$$\tilde{g}^{ik}=\tilde{\gamma}^{ik}+\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{ik}. \qquad (8.43)$$

Следует особо подчеркнуть, что вычисление детерминанта g наиболее просто осуществить, если воспользоваться плотностью тензора $\tilde{g}^{\mu\nu}$ и учесть, что

$$g=\det(\tilde{g}^{\mu\nu})=\det(g_{\mu\nu})\ . \qquad (8.44)$$

На основании (8.42) и (8.43) найдем

$$\sqrt{-g}=1+2U+\frac{3}{2}U^2+2\Phi_1+5\Phi_2+$$
$$+2\Phi_3-\frac{1}{2}\Phi-\frac{1}{2\pi}\partial_0^2\int\frac{U}{|x-x'|}\,d^3x'. \qquad (8.45)$$

Здесь

$$\Phi=\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{11}+\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{22}+\overset{(4)}{\tilde{\Phi}}{}^{33}. \qquad (8.46)$$

Так как в рассматриваемом приближении $g_{00}g^{00}=1$, то из выражений (8.42) и (8.45) получим

$$g_{00}\ =1-2U+\frac{5}{2}U^2-2\Phi_1-5\Phi_2-$$
$$-\,2\Phi_3-\frac{1}{2}\Phi+\frac{1}{2\pi}\partial_0^2\int\frac{U}{|x-x'|}d^3x'. \qquad (8.47)$$

Для определения g_{00} нам необходимо вычислить величину Φ. Поскольку Φ, согласно (8.46), получена суммированием, то можно воспользоваться уравнением (8.1) и путем суммирования непосредственно получить уравнения для функции Φ.

Из (8.3) путем суммирования получим из первого члена следующее выражение:

$$-\,16\pi g\tau_g^{ii}=-2(\mathrm{grad}\,U)^2. \qquad (8.48)$$

Все остальные члены, входящие в выражение (8.3), в данном приближении не дают вклада. С помощью формулы (8.10) для тензора энергии-импульса вещества найдем

$$-16\pi g \overset{(2)}{\tilde{T}^{ii}} = -16\pi\rho v_i v^i + 48\pi p\,. \tag{8.49}$$

Учитывая (8.48) и (8.49), уравнение для Φ можно представить в форме

$$\Delta\Phi = 16\pi\rho v_i v^i - 48\pi p + 2(\mathrm{grad}\, U)^2. \tag{8.50}$$

Воспользовавшись тождеством (8.37) и уравнением (8.38), получим

$$\Delta(\Phi - U^2) = 16\pi\rho v_i v^i + 8\pi\rho U - 48\pi p\,. \tag{8.51}$$

Отсюда находим

$$\Phi = U^2 + 4\Phi_1 - 2\Phi_2 + 12\Phi_4, \tag{8.52}$$

где

$$\Phi_4 = \int \frac{p}{|x - x'|} d^3x'.$$

Подставляя выражение (8.52) в (8.47), имеем

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - \\ &- 2\Phi_3 - 6\Phi_4 + \frac{1}{2\pi}\partial_0^2 \int \frac{U}{|x - x'|} d^3x'. \end{aligned} \tag{8.53}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{U}{|x - x'|} d^3x' = -\int \rho |x - x'| d^3x',$$

выражение (8.53) запишем в форме

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - \\ &- 2\Phi_3 - 6\Phi_4 - \partial_0^2 \int \rho |x - x'| d^3x'. \end{aligned} \tag{8.54}$$

Полученные решения (8.54) и (8.28) вычислены в инерциальной системе в галилеевых координатах. Возникшая эффективная риманова метрика обязана наличию гравитационного поля, при этом силы инерции полностью исключены. Совершенно очевидно, что эти решения сохраняют свою функциональную форму в любой инерциальной системе в галилеевых координатах. Поскольку от преобразования временной переменной все физические величины не зависят, то если совершить преобразование

$$x'^0 = x^0 + \eta^0(x),\ x'^i = x^i\ , \tag{8.55}$$

метрические коэффициенты изменятся следующим образом:

$$g'_{00} = g_{00} - 2\partial_0\eta^0,\ g'_{0i} = g_{0i} - \partial_i\eta^0,\ g'_{ik} = g_{ik}\ . \tag{8.56}$$

Следует отметить, что преобразование (8.55) не выводит нас из инерциальной системы отсчета, поскольку такое преобразование есть ни что иное, как другой выбор часов. Все физически измеряемые величины не зависят от этого выбора.

Принимая функцию η^0

$$\eta^0 = -\frac{1}{2}\partial_0 \int \rho|x - x'|d^3x', \tag{8.57}$$

и учитывая тождество

$$\begin{gathered}\partial_i\eta^0 = \frac{1}{2}(\gamma_{ik}V^k - N_i),\\ N_i = \int \frac{\rho v^k(x_k - x'_k)(x_i - x'_i)}{|x - x'|^3}d^3x',\end{gathered} \tag{8.58}$$

после подстановки в (8.56) выражений (8.28) для g_{0i} и g_{ik}, а также выражения (8.54) для g_{00} с учетом (8.57) и (8.58), найдем метрические коэффициенты эффективного риманова пространства в так называемой “канонической форме”:

$$\begin{gathered}g_{00} = 1 - 2U + 2U^2 - 4\Phi_1 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 - 6\Phi_4,\\ g_{0i} = \frac{7}{2}\gamma_{ik}V^k + \frac{1}{2}N_i,\\ g_{ik} = \gamma_{ik}(1 + 2U)\ .\end{gathered} \tag{8.59}$$

Эти выражения точно совпадают с формулами, которые получают на основе ОТО. Разница состоит в том, что здесь они точно следуют из уравнений РТГ, тогда как для их получения из уравнений ОТО необходимо использовать дополнительные предположения, которые не следуют из теории, т.е. необходимо выйти за пределы ОТО. На этом мы остановимся специально в следующих разделах.

Для статического сферически-симметричного тела постньютоновское приближение, согласно (8.59), вдали от тела имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{2MG}{r} + 2\left(\frac{MG}{r}\right)^2, \quad g_{0i} = 0,$$
$$g_{ik} = \gamma_{ik}\left(1 + \frac{2MG}{r}\right), \quad M = \int \rho(x) d^3x. \tag{8.59a}$$

На основании выражений (8.59) постньютоновские параметры Нордтведта–Уилла в РТГ равны следующим значениям:

$$\gamma = 1, \beta = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_W = 0.$$

Метрические коэффициенты (8.59) вычислены нами в РТГ в инерциальной системе отсчета. Приведем теперь выражения для компонент тензора энергии-импульса вещества, по сравнению с (8.15), в следующем приближении. Учитывая выражение (8.34) для u^0, а также что

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = v^i(1 + U - \frac{1}{2}v_k v^k), \tag{8.60}$$

из формулы (8.10) находим

$$\overset{(3)}{T}{}^{0i} = \rho v^i(2U + \Pi - v_k v^k) + p v^i, \tag{8.61}$$

$$\overset{(2)}{T}{}^{ik} = \rho v^i v^k - p\gamma^{ik}. \tag{8.62}$$

Компонента $\overset{(2)}{T}{}^{00}$ определяется выражением (8.35). На основании (8.59), используя уравнения геодезической линии, можно рассчитать все эффекты в Солнечной системе. Когда в ОТО вычисляют гравитационные эффекты в Солнечной системе, исходя из постньютоновского приближения, то результаты получают правильные и неоднозначность в описании эффектов отсутствует. Если же использовать точные решения уравнений ОТО, то возникает неоднозначность в описании эффектов.

В заключение остановимся несколько подробнее на сравнении РТГ и ОТО при анализе эффектов в слабом гравитационном поле. Система уравнений (8.1), (8.2) вместе с уравнением состояния определяет все физические величины той или иной гравитационной задачи. Проведенные ранее расчеты постньютоновского приближения сделаны в инерциальной системе координат. В ОТО, в принципе, не существует инерциальной системы. А.Эйнштейн по этому поводу писал: *"Исходным пунктом теории служит утверждение, что не существует физически выделенного состояния движения, т.е. не только скорость, но и ускорение не имеют абсолютного смысла"*[28]. Но если отсутствует инерциальная система координат, то к какой системе отсчета следует относить вычисления, проведенные в ОТО?

В.А.Фок при расчете гравитационных эффектов пользовался гармоническими условиями в декартовых координатах. Он называл их координатными условиями. Так, в работе [24] он писал: *"При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной."* Далее в этой же статье он отмечал: *"Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом опреде-*

[28] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.92, с.264.

ленной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной.” И, наконец, в работе [25] он писал: *“Принцип относительности, выражаемый преобразованиями Лоренца, возможен и в неоднородном пространстве, общий же принцип относительности невозможен”*.

Все эти высказывания Фока были продиктованы стремлением внести ясность в физическую суть ОТО, освободив ее от неимеющей физического смысла общей относительности. Однако при этом Фок фактически вышел за пределы ОТО. Именно благодаря такому выходу, он и пришел к поразительному утверждению о справедливости принципа относительности в неоднородном пространстве. Если оставаться в римановом пространстве, а в ОТО другого пространства и нет, то это утверждение противоречит правильному выводу Фока, что “*в общей теории относительности нет, вообще говоря, никакой относительности*” [25]. Но чтобы осуществить его замысел, необходимо ввести представления о гравитационном поле в пространстве Минковского. Где же Фок совершил выход из ОТО? При использовании гармонических условий он фактически рассматривал декартовы координаты

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 , \tag{8.63}$$

x^μ — декартовы координаты. В декартовых координатах $\gamma(x) = \det \gamma_{\mu\nu} = -1$. Поэтому согласно тензорному закону преобразований имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)}{\sqrt{-\gamma(y)}} . \tag{8.64}$$

Запишем уравнение (8.63) в форме

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\tau}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{g}^{\mu\nu}(x)}{\partial y^\tau}. \tag{8.65}$$

Для дальнейших вычислений приведем формулы

$$\frac{\partial}{\partial y^\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{-\gamma(y)}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\gamma^\lambda_{\tau\lambda}, \ \gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma} . \quad (8.66)$$

После подстановки (8.64) в (8.65) и учитывая (8.66), получим

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}(y)}{\partial y^\alpha} + \\ + \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = 0 . \quad (8.67)$$

Множитель второго члена запишем в форме

$$\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\tau}\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\gamma^\sigma_{\alpha\beta} .$$

Подставляя это выражение в предыдущее, найдем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma}\left(\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\sigma}(y)}{\partial y^\alpha} + \gamma^\sigma_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y)\right) = 0 ,$$

т.е. имеем

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\sigma} D_\mu \tilde{g}^{\mu\sigma}(y) = 0 . \quad (8.68)$$

Итак, мы установили, что плотность тензора $\tilde{g}^{\mu\sigma}(y)$ в произвольных координатах автоматически удовлетворяет общековариантному уравнению

$$D_\lambda \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0 ,$$

если исходное условие гармоничности (8.63) записано в декартовых координатах. Но это означает, что условие гармоничности является не координатным условием, а полевым уравнением в пространстве Минковского. Таким образом, использование гармонического условия в декартовых координатах не является невинной операцией, а предполагает выход за рамки ОТО путем введения пространства Минковского.

Полученное выше уравнение совпадает с уравнением (5.20) РТГ. В РТГ оно следует из принципа наименьшего действия. Переходя от координат y к координатам z, получим (см. приложение Д (Д.12))

$$\Box\, y^\lambda = -\gamma^\lambda_{\alpha\beta}(y) g^{\alpha\beta}(y),$$

где через $\Box$ обозначен оператор

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left(\tilde{g}^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial z^\sigma} \right).$$

Поэтому, когда Фок записывал гармонические условия в форме

$$\Box\, y^\lambda = 0,$$

он фактически имел дело с декартовыми координатами, для которых $\gamma^\lambda_{\alpha\beta}(y) = 0$, т.е. с пространством Минковского в галилеевых координатах. Фок, выбирая гармонические координаты в виде условий (8.63), в действительности использовал пространство Минковского в галилеевых координатах, а уравнения (8.63) играли роль не координатных условий, а полевых уравнений. Но почему необходимо добавить к уравнениям Гильберта–Эйнштейна именно уравнения (8.63) в галилеевых координатах, а не какие-либо другие, чтобы получить полную систему уравнений гравитации в подходе Фока, оставалось неясным. Здесь Фок, по-видимому, руководствовался физической интуицией, а также возникающим при вычислении математическим упрощением.

Пытался ли Фок рассматривать гравитационное поле в пространстве Минковского? Нет, он был далек от этой мысли и писал об этом: *"Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в* *рамки евклидова пространства"* [24]. Как мы видели, использование гармонических условий в декартовых координатах выводит нас за рамки ОТО. Но это означает, что система уравнений гравитации, которую изучал Фок, отличается от системы уравнений ОТО, т.е. теория гравитации Фока, основанная на гармонических условиях в декартовых координатах, и ОТО Эйнштейна — это различные теории. Подход Фока оказался ближе к представлениям РТГ. Все то, что Фок стремился внести в теорию гравитации (инерциальные системы, ускорение относительно пространства), полностью содержится в РТГ, но это достигается путем рассмотрения гравитационного поля, как и всех других физических полей в пространстве Минковского. При этом все геометрические характеристики риманова пространства уже являются полевыми величинами в пространстве Минковского.

При анализе гравитационных эффектов в Солнечной системе Фок фактически пользовался пространством Минковского, поскольку все вычисленные гравитационные эффекты он относил к инерциальной системе координат. Именно это обстоятельство и позволило ему получить правильные выражения для эффектов. Так, например, он писал: *"Как следует определять прямую: как луч света или как прямую в том евклидовом пространстве, в котором декартовыми координатами служат гармонические координаты x_1, x_2, x_3? Нам представляется единственно правильным второе определение. Фактически мы им и пользовались, когда говорили о том, что луч света вблизи Солнца имеет форму гиперболы"*,— и далее по этому поводу, *"соображения, что прямая, как луч света, более непосредственно наблюдаема, то оно не имеет никакого значения: в определениях решающим является не непосредственная наблюдаемость, а соответствие природе, хотя бы это соответствие и устанавливалось путем косвенных умозаключений"* [25].

В РТГ гравитационные эффекты определяются однозначно, поскольку согласно уравнениям (8.1), (8.2), записанным в галилеевых координатах инерциальной системы, движение света или пробного тела при выключении гравитационного поля действительно происходит по прямой линии, являющейся геодезической в пространстве Минковского. В неинерциальной системе координат геодезическая линия в пространстве Минковского уже не будет прямой линией. Но это означает, что в РТГ в неинерциальной системе координат для нахождения гравитационного эффекта движение в эффективном римановом пространстве необходимо сравнивать именно с геодезическим движением в ускоренной системе координат.

При вычислении эффектов гравитации в Солнечной системе, когда влиянием массы гравитона можно пренебречь, система уравнений (8.1) и (8.2) РТГ только в галилеевых координатах совпадает с системой уравнений, которую решал Фок в гармонических (декартовых) координатах. Если оставаться в рамках ОТО, то в любой другой системе, например, неинерциальной, они уже существенно отличаются. Это происходит потому, что система уравнений Фока не общековариантна, тогда как система уравнений РТГ общековариантна. Фок полную систему гравитационных уравнений (для островных систем) получил путем добавления гармонических условий к уравнениям Гильберта–Эйнштейна. Но почему именно гармонические условия необходимо добавить, а не какие-либо другие, оставалось неясным. Согласно РТГ полная система гравитационных уравнений (8.1), (8.2) возникает из принципа наименьшего действия. Отсюда и становится ясным, почему появляются условия (8.2), которые в декартовых координатах совпадают с гармоническими условиями, а не какие-либо другие. Эти уравнения становятся универсальными, справедливыми не только для островных систем. Но если бы Фок осознал, что при использовании гармонических условий он фактически имеет дело с декартовыми координатами пространства Минковского, то он без труда получил бы выражение (8.68). Как мы уже отмечали ранее, гармонические условия в декартовых координатах, которые с успехом использовал Фок, вывели его за рамки ОТО Эйнштейна. Это обстоятельство в свое время отмечал Л.Инфельд, который в 1957 году писал: *"Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных системах координат"*[29].

Если оставаться в рамках ОТО, то совершенно непонятно, с точки зрения физики, почему необходимо выбирать гармонические условия, а не какие-либо другие. Тогда как в РТГ из-за наличия массы гравитона эти условия возникают как следствие выполнимости уравнений для вещества [см.(5.7́) и (5.17)], т.е. они вытекают из принципа наименьшего действия, а поэтому имеют универсальное значение. Однако в ОТО и без использования гармонических условий в декартовых координатах, тем не менее, также получают аналогичные выражения для постньютоновского приближения. В чем же дело? Причина состоит в том, что опять вводится пространство Минковского в галилеевых координатах и фактически гравитационное поле рассматривается как физическое поле в этом пространстве.

В качестве нулевого приближения для римановой метрики берется метрика пространства Минковского в галилеевых координатах. К ней добавляются различные потенциалы с произвольными постньютоновскими параметрами, каждый из которых убывает как $0(\frac{1}{r})$. Таким путем устраняется произвол, содержащийся в ОТО. Подставляя риманову метрику $g_{\mu\nu}$ в таком виде в уравнение Гильберта–Эйнштейна, мы можем определить значение постньютоновских параметров и опять придем к тому же постньюто-

[29] Л.Инфельд. Новейшие проблемы гравитации. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, с.162.

новскому приближению. При этом гравитация рассматривается как физическое поле в пространстве Минковского, поведение которого описывается введенными гравитационными потенциалами. Такое требование на характер поведения метрики риманова пространства не следует из ОТО, поскольку в общем случае асимптотика метрики весьма произвольна и даже зависит от выбора трехмерных пространственных координат. Поэтому на метрику невозможно наложить физические условия. Но если она эффективная и возникает из-за физического поля, то физические условия на метрику возникают естественным образом.

В РТГ гравитационные уравнения (5.19), (5.20) общековариантны, но не форминвариантны относительно произвольных преобразований. Они форминвариантны относительно лоренцевых преобразований. Но это означает, что в лоренцевых координатах, если имеет место решение $G(x)$ при тензоре вещества $T_{\mu\nu}(x)$, то в новых лоренцевых координатах x' имеет место решение $G'(x')$ при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x')$, а следовательно, в координатах x решение $G'(x)$ возможно только при тензоре вещества $T'_{\mu\nu}(x)$.

В РТГ устанавливается взаимно однозначное соответствие между римановой метрикой и метрикой Минковского, что и позволяет при вычислении гравитационного эффекта сравнить движение под действием гравитационного поля с движением в его отсутствии. При выключении гравитационного поля в РТГ обращается в нуль тензор Римана, и одновременно совершается переход от римановой метрики к метрике Минковского, ранее выбранной при постановке физической задачи. Это и обеспечивает в РТГ выполнимость принципа соответствия.

Для вычисления гравитационного эффекта необходимо сравнить движение в римановом пространстве с движением в отсутствии гравитационного поля. Именно так определяется гравитационный эффект. Если в ОТО соотносить совокупность решений для $g_{\mu\nu}$ к какой-то одной инерциальной системе координат, то совершенно очевидно, что мы получим множество различных значений для гравитационного эффекта. Какое из них выбрать? Поскольку в уравнениях Гильберта–Эйнштейна отсутствует метрика пространства Минковского, то невозможно соблюсти принцип соответствия, поскольку нельзя определить, в какой системе координат мы находимся (инерциальной или неинерциальной) при выключении гравитационного поля.

В заключение данного раздела отметим, что постньютоновское приближение (8.59) удовлетворяет принципу причинности (6.11).

9. О равенстве инертной и гравитационной масс

В силу того что источником гравитационного поля является плотность тензора энергии-импульса, в разделе 8 было установлено равенство инертной и гравитационной масс. В настоящем разделе мы покажем, что полевой подход к гравитации позволяет тривиально получить метрику эффективного риманова пространства в первом приближении по гравитационной постоянной G. Это особенно просто установить из уравнений (2.2). Для сферически-симметричного статического тела в галилеевых координатах инерциальной системы уравнения (2.2) имеют вид

$$\Delta\tilde{\Phi}^{00} - m^2\tilde{\Phi}^{00} = -16\pi t^{00}, \tag{9.1}$$

$$\Delta\tilde{\Phi}^{0i} - m^2\tilde{\Phi}^{0i} = 0, \;\; \Delta\tilde{\Phi}^{ik} - m^2\tilde{\Phi}^{ik} = 0, \;\; i,k = 1,2,3. \tag{9.2}$$

Для статического тела только одна компонента t^{00} отлична от нуля.

Из уравнений (9.2) имеем

$$\tilde{\Phi}^{0i} = 0, \;\; \tilde{\Phi}^{ik} = 0\,. \tag{9.3}$$

Вдали от тела из уравнения (9.1) находим

$$\tilde{\Phi}^{00} \simeq \frac{4M}{r}e^{-mr}, \;\; M = \int t^{00}d^3x\,, \tag{9.4}$$

M — инертная масса тела, создающего гравитационное поле. В Солнечной системе экспоненциальный множитель, ввиду малости величины mr, можно опустить, т.е.

$$\tilde{\Phi}^{00} \simeq \frac{4M}{r}\,. \tag{9.5}$$

Найдем компоненты плотности метрического тензора эффективного риманова пространства $\tilde{g}^{\mu\nu}$. На основании (2.6) имеем

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\Phi}^{\mu\nu}, \;\; \tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \tag{9.6}$$

Отсюда, учитывая (9.3) и (9.5), получим следующие, отличные от нуля, компоненты $\tilde{g}^{\mu\nu}$

$$\tilde{g}^{00} = 1 + \frac{4M}{r}, \ \ \tilde{g}^{11} = \tilde{g}^{22} = \tilde{g}^{33} = -1. \tag{9.7}$$

Они точно удовлетворяют уравнению (2.3). На основании (9.7) находим

$$g_{00} = \frac{\sqrt{-g}}{1 + \frac{4M}{r}}, \ \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\sqrt{-g}. \tag{9.8}$$

$$-g = -\tilde{g}^{00}\tilde{g}^{11}\tilde{g}^{22}\tilde{g}^{33} = \left(1 + \frac{4M}{r}\right). \tag{9.9}$$

Подставляя выражения для g в формулы (9.8), получим

$$g_{00} \simeq \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \ \ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right). \tag{9.10}$$

Следует особо подчеркнуть, что на том месте, где в соответствии с законом тяготения Ньютона должна находиться активная гравитационная масса, возникла инертная масса M. Таким образом равенство инертной и активной гравитационной масс является прямым следствием того, что источником гравитационного поля является плотность тензора энергии-импульса. Так что причиной равенства инертной и гравитационной масс является не локальная тождественность сил инерции и гравитации (а этого и в ОТО нет), а универсальность сохраняющегося источника гравитационного поля — тензора энергии-импульса материи.

Интервал в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)\left(dx^2 + dy^2 + dr^2\right). \tag{9.11}$$

Классические эффекты гравитации, такие как гравитационное красное смещение спектральных линий, отклонение луча света Солнцем, временное запаздывание радиосигнала, прецессия гироскопа на земной орбите, полностью описываются этим интервалом.

Из выражения (9.10) очевидно, что силы гравитации являются силами притяжения, поскольку величина M, как инертная масса, всегда положительна. Что касается ОТО, то согласно этой теории нельзя доказать равенство инертной и активной гравитационной масс. Этот вопрос тщательно проанализирован совместно с проф. В.И.Денисовым и подробно описан в монографии [10]. Суть вопроса состоит в том, что выражение инертной массы, определяемое из псевдотензора гравитационного поля, зависит от выбора трехмерных координат, что физически недопустимо. Именно простым выбором трехмерных пространственных координат (что всегда допустимо) можно показать, что в ОТО инертная масса не равна активной гравитационной массе. Поскольку равенство физически измеримых величин в ОТО зависит от выбора трехмерных пространственных координат, то это означает, что в ней и здесь далеко не все в порядке. Иногда высказывается мнение, что в рамках ОТО можно построить тензор энергии-импульса гравитационного поля путем замены в выражении для псевдотензора обычных производных ковариантными в пространстве Минковского. Однако при этом, с одной стороны, нельзя сказать определенно какую метрику в пространстве Минковского необходимо взять при такой замене, а с другой — в римановом пространстве не существует глобальных декартовых координат, а следовательно, и пространства Минковского, поэтому и такой подход не устраняет принципиальной трудности ОТО — отсутствия интегральных законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения для вещества и гравитационного поля вместе взятых.

10. Эволюция однородной и изотропной Вселенной

Уравнения РТГ запишем в форме

$$R_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}) = \frac{8\pi}{\sqrt{-g}}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) , \qquad (10.1)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 . \qquad (10.2)$$

Мы выбрали для удобства систему единиц $G = \hbar = c = 1$. В окончательных выражениях зависимость от этих постоянных мы будем восстанавливать. Плотность тензора энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \sqrt{-g}[(\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p], \;\; U^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} , \qquad (10.3)$$

где ρ — плотность вещества, p — давление, ds — интервал эффективного риманова пространства. Для однородной и изотропной модели Вселенной интервал эффективного риманова пространства ds имеет общий вид

$$ds^2 = U(t)dt^2 - V(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2)\right] . \qquad (10.4)$$

Здесь k принимает значения $1, -1, 0$; $k = 1$ соответствует замкнутой Вселенной, $k = -1$ — гиперболической, а $k = 0$ — “плоской”.

Поскольку система уравнений РТГ (10.1) и (10.2) вместе с уравнением состояния является полной, то при соответствующих начальных условиях она может иметь только одно решение, описывающее развитие однородной и изотропной модели Вселенной. Тогда как уравнения ОТО для такой же модели дают три хорошо известных сценария развития Вселенной. Сценарий развития Вселенной, полученный на основе уравнений РТГ, не совпадает ни с одним из сценариев, полученных на основе ОТО. Мы будем следовать работе [31].

Все рассмотрение будем вести в инерциальной системе в сферических координатах r, Θ, Φ. Интервал в пространстве Минковского в этом случае имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \\ = dt^2 - dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2)\ . \qquad (10.5)$$

Определитель g, составленный из компонент $g_{\mu\nu}$, равен

$$g = -UV^3(1 - kr^2)^{-1} r^4 \sin^2\Theta. \qquad (10.6)$$

Тензорная плотность

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \qquad (10.7)$$

имеет, согласно (10.4), следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{00} &= \sqrt{\frac{r^4 V^3}{U(1-kr^2)}}\ \sin\Theta, \\ \tilde{g}^{11} &= -r^2\sqrt{UV(1-kr^2)}\ \sin\Theta, \\ \tilde{g}^{22} &= -\sqrt{\frac{UV}{1-kr^2}}\ \sin\Theta, \\ \tilde{g}^{33} &= -\sqrt{\frac{UV}{1-kr^2}}\ \frac{1}{\sin\Theta}. \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Символы Кристоффеля пространства Минковского равны

$$\gamma^1_{22} = -r,\ \ \gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta,\ \ \gamma^2_{12} = \gamma^3_{13} = \frac{1}{r}\ , \\ \gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta,\ \ \gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\Theta\ . \qquad (10.9)$$

Уравнение (10.2) имеет вид

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} = 0\ . \qquad (10.10)$$

Подставляя (10.9) в (10.10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V^3}{U}\right) = 0\ , \tag{10.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sqrt{1-kr^2}) = 2r(1-kr^2)^{-1/2}. \tag{10.12}$$

Из выражения (10.11) следует

$$V = aU^{1/3},$$

здесь a — постоянная интегрирования.

Из (10.12) непосредственно находим

$$k = 0\ , \tag{10.13}$$

т.е. *пространственная метрика является евклидовой.* Следует подчеркнуть, что этот вывод для однородной и изотропной Вселенной непосредственно следует из уравнения (10.2) для гравитационного поля и не зависит от плотности вещества. Таким образом, уравнение (10.2) исключает замкнутую и гиперболическую модели Вселенной. Однородная и изотропная Вселенная, согласно РТГ, может быть только "плоской". Другими словами, в рамках РТГ отсутствует известная проблема плоскостности Вселенной. Эффективная риманова метрика (10.4) с учетом (10.11) и (10.13) принимает вид

$$ds^2 = U(t)dt^2 - aU^{1/3}[dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2)]\ . \tag{10.14}$$

Если перейти к собственному времени $d\tau$

$$d\tau = \sqrt{U}dt \tag{10.15}$$

и ввести обозначение

$$R^2 = U^{1/3}(t)\ , \tag{10.16}$$

интервал (10.14) принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - aR^2(\tau)[dx^2 + dy^2 + dz^2]\,. \tag{10.17}$$

Здесь и далее в этом разделе R — масштабный фактор. (Мы вынуждены использовать принятые в литературе обозначения для этой величины, несмотря на то что в предыдущих разделах через R была обозначена скалярная кривизна.) Для данной метрики символы Кристоффеля принимают вид

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{22} = -r,\ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r},\\ \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta,\ \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}\,\Theta\,,\end{gathered} \tag{10.18}$$

$$\Gamma^0_{ii} = aR\frac{dR}{d\tau},\ \ \Gamma^i_{0i} = \frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau},\ \ i = 1,2,3\,. \tag{10.19}$$

Используя выражение (4.13), имеем

$$\begin{gathered}R_{00} = -\frac{3}{R}\frac{d^2R}{d\tau^2},\ \ R_{11} = 2a\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + aR\frac{d^2R}{d\tau^2}\,,\\ R_{22} = r^2R_{11},\ \ R_{33} = \sin^2\Theta\cdot R_{22},\ \ R_{0i} = 0\,,\end{gathered} \tag{10.20}$$

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -\frac{6}{R}\frac{d^2R}{d\tau^2} - \frac{6}{R^2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2. \tag{10.21}$$

Поскольку $g_{0i} = 0$, $R_{0i} = 0$, то из уравнения (10.1) непосредственно следует

$$T_{0i} = 0\,. \tag{10.22}$$

На основании (10.3) отсюда имеем

$$U_i = 0\,. \tag{10.23}$$

Это означает, что в инерциальной системе вещество покоится. Таким образом, так называемое “расширение” Вселенной, наблюдаемое по красному смещению, вызвано изменением гравитационного поля во времени. Поэтому никакого расширения Вселенной, связанного с движением объектов друг относительно друга, нет. Красное смещение связано не с движением галактик, которого нет, а с изменением гравитационного поля во времени. Поэтому из-за наличия красного смещения не следует, что когда-то галактики были близки друг к другу. Тогда как, согласно ОТО, *"Все варианты модели Фридмана имеют то общее, что в какой-то момент времени в прошлом (десять–двадцать тысяч миллионов лет назад) расстояние между соседними галактиками должно было равняться нулю"*[30]. Мы здесь процитировали С. Хокинга и далее установим причину отличия выводов развития Вселенной в РТГ и ОТО. Остановимся несколько подробнее на природе красного смещения.

Из (10.17) следует, что скорость луча света равна

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{a}R(\tau)}.$$

Выберем точку наблюдения в начале координат ($r = 0$). Пусть из точки r в течение интервала времени от τ до $\tau + d\tau$ излучается световой сигнал, который в точку $r = 0$ приходит в течение интервала времени от τ_0 до $\tau_0 + d\tau_0$, тогда для света, испущенного в момент τ и пришедшего в точку $r = 0$, в момент τ_0 имеем

$$\int\limits_{\tau}^{\tau_0} \frac{d\tau}{R(\tau)} = \sqrt{a}r,$$

аналогично для света, испущенного в момент $\tau + d\tau$ и пришедшего в точку $r = 0$ в момент $\tau_0 + d\tau_0$, находим

$$\int\limits_{\tau+d\tau}^{\tau_0+d\tau_0} \frac{d\tau}{R(\tau)} = \sqrt{a}r.$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{d\tau}{R(\tau)} = \frac{d\tau_0}{R(\tau_0)}.$$

---

[30] С.Хокинг. От большого взрыва до черных дыр. М.: Мир, 1990, с.46.

Или, переходя к частоте света, имеем

$$\omega = \frac{R(\tau_0)}{R(\tau)}\omega_0.$$

Отсюда очевидно, что частота света ω в точке испускания не равна частоте света ω_0 в точке его наблюдения.

Вводя *параметр красного смещения* z

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0},$$

имеем

$$z = \frac{R(\tau_0)}{R(\tau)} - 1.$$

Нетрудно заметить, что красное смещение связано с изменением только масштабного фактора $R(\tau)$, при этом изменении, согласно (10.23), отсутствует какое-либо движение вещества. Таким образом, природа красного смещения связана не с разлетом галактик, которого нет, а с изменением гравитационного поля со временем, т.е. связано с тем, что $R(\tau_0) > R(\tau)$.

Следует особо подчеркнуть, что данная инерциальная система координат выделена самой Природой, т.е. в рассматриваемой теории автоматически выполняется принцип Маха.

Подставляя (10.20) и (10.3) с учетом (10.23) в уравнение (10.1), имеем

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) - 2\omega\left(1 - \frac{1}{R^6}\right), \quad (10.24)$$

$$\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\omega}{R^6}\left(1 - \frac{3R^4}{a} + 2R^6\right), \quad (10.25)$$

где

$$\omega = \frac{1}{12}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2. \quad (10.26)$$

Из (10.24) видно, что при малых значениях масштабного фактора R из-за второго члена возникает начальное ускорение. Именно оно и является “толчком”, приведшим к “расширению” Вселенной. Начальное ускорение возникает в момент остановки роста плотности вещества в предшествующем цикле. Из уравнения (10.25) в области $R \gg 1$ следует, что современная плотность вещества во Вселенной

$$\rho(\tau) = \rho_c(\tau) + \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2, \tag{10.27}$$

где $\rho_c(\tau)$ — критическая плотность, определяемая “постоянной” Хаббла

$$\rho_c = \frac{3H^2(\tau)}{8\pi G}, \quad H(\tau) = \frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau}. \tag{10.28}$$

Отсюда с неизбежностью следует существование “темной” материи, что согласуется с современными данными наблюдений.

Из уравнений (10.24), (10.25) можно получить выражение для параметра замедления Вселенной $q(\tau)$:

$$q = -\frac{\ddot{R}}{R}\frac{1}{H^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{c}{H}\right)^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2. \tag{10.29}$$

Таким образом, параметр q в настоящее время является положительным, т.е. имеет место замедление “расширения” Вселенной, а не ускорение. Соотношение (10.29) дает принципиальную возможность определить массу гравитона по двум наблюдаемым космологическим величинам H и q. Из принципа причинности (6.10), (6.11) вытекает, что

$$R^2(R^4 - a) \leq 0\,. \tag{10.30}$$

Для соблюдения условия причинности во всей области изменения $R(\tau)$ естественно положить

$$a = R^4_{\max}. \tag{10.31}$$

Из условия неотрицательности левой части уравнения (10.25) следует, что расширение должно начинаться с некоторого минимального значения $R_{\min}$, отвечающего значению $\frac{dR}{d\tau} = 0$. С другой стороны, при $R \gg 1$ расширение должно останавливаться при $R_{\max}$, когда плотность (10.27) достигает своего минимального значения

$$\rho_{\min} = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(1 - \frac{1}{R^6_{\max}}\right). \tag{10.32}$$

и начнется процесс сжатия до $R_{\min}$.

Таким образом, в РТГ отсутствует космологическая особенность, и наличие массы гравитона приводит к циклическому характеру эволюции Вселенной. Время расширения Вселенной от максимальной плотности до минимальной определяется, в основном, стадией доминантности нерелятивистской материи и равно

$$\tau_{\max} \simeq \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\pi\hbar}{mc^2}. \tag{10.33}$$

Из ковариантного закона сохранения, являющегося следствием уравнений (5.19), (5.20)

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\tilde{T}^{\alpha\beta} = 0,$$

можно получить уравнение

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau} = -\frac{1}{3(\rho + \frac{p}{c^2})}\frac{d\rho}{d\tau}. \tag{10.34}$$

Для радиационно-доминантной стадии развития Вселенной

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2$$

из уравнения (10.34) получаем выражения для радиационной плотности ρ_r

$$\rho_r(\tau) = \frac{A}{R^4(\tau)}, \tag{10.35}$$

где A — постоянная интегрирования. На стадии развития Вселенной, когда доминирует нерелятивистская материя и давлением можно пренебречь, из уравнения (10.34) находим

$$\rho_m(\tau) = \frac{B}{R^3(\tau)}\,, \tag{10.36}$$

B — постоянная интегрирования.

Пусть в некоторый момент времени τ_0 радиационная плотность $\rho_r(\tau_0)$ сравнивается с плотностью вещества $\rho_m(\tau_0)$

$$\rho_r(\tau_0) = \rho_m(\tau_0)\,, \tag{10.37}$$

тогда

$$A = BR(\tau_0) = BR_0.$$

Поскольку на поздних стадиях развития Вселенной доминирует вещество, из формулы (10.36) имеем

$$B = \rho_{\min} \cdot R^3_{\max}. \tag{10.38}$$

Итак

$$\rho \simeq \rho_r = \frac{\rho_{\min} R_0 \cdot R^3_{\max}}{R^4}, \;\; R \leq R_0, \tag{10.39}$$

$$\rho \simeq \rho_m = \rho_{\min} \left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^3, \;\; R \geq R_0. \tag{10.40}$$

Современная плотность радиации (включая три сорта нейтрино, которые мы для определенности считаем безмассовыми) и критическая плотность вещества, согласно данным наблюдений (см., например, [33]), соответственно равны

$$\rho_r(\tau_c) = 8 \cdot 10^{-34}\text{г}/\text{см}^3, \;\; \rho_m(\tau_c) = 10^{-29}\text{г}/\text{см}^3. \tag{10.41}$$

“Скрытую” массу мы должны отнести к плотности вещества $\rho_m(\tau_c)$, при нашем выборе массы гравитона

$(m = 10^{-66}$г$)$, она близка к критической плотности ρ_c, определяемой "постоянной" Хаббла. Под веществом мы подразумеваем все формы материи, кроме гравитационного поля.

Согласно формулам (10.39), (10.40) и (10.41) имеем

$$\rho_r(\tau_c) = \frac{\rho_{\min} R_0 \cdot R^3_{\max}}{R^4(\tau_c)} = 8 \cdot 10^{-34}\text{г/см}^3, \tag{10.42}$$

$$\rho_m(\tau_c) = \rho_{\min}\left(\frac{R_{\max}}{R(\tau_c)}\right)^3 = 10^{-29}\text{г/см}^3. \tag{10.43}$$

Отсюда находим

$$R_0 = \frac{\rho_r(\tau_c)}{\rho_m^{4/3}(\tau_c)} R_{\max} \cdot \rho^{1/3}_{\min} = 3,7 \cdot 10^5 \rho^{1/3}_{\min} \cdot R_{\max}. \tag{10.44}$$

Введем обозначение

$$\sigma = \frac{4}{3} R_0 \cdot R^3_{\max}. \tag{10.45}$$

Согласно (10.39), (10.44) и (10.45), получаем

$$\rho(\tau) \simeq \rho_r(\tau) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sigma \cdot \rho_{\min}}{R^4(\tau)}, \quad R \leq R_0. \tag{10.46}$$

Предполагая, что на начальной стадии расширения в модели горячей Вселенной доминирует радиация, из уравнения (10.25) при учете (10.31), (10.32) и (10.46) получаем

$$H^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \omega\left[\frac{3\sigma}{2R^4} - 2 + \frac{3}{R^4_{\max} \cdot R^2} - \frac{1}{R^6}\right]. \tag{10.47}$$

Уравнение (10.47) дает возможность определить закон расширения Вселенной на начальной стадии. Нетрудно заметить, что правая часть уравнения (10.47) обращается в нуль при достаточно малых значениях $R = R_{\min}$. Основную роль при этом играет первый член в скобках в выражении (10.25), отвечающий массе гравитона.

Вводя переменную $x = R^{-2}$, легко найти приближенные значения для корней уравнения

$$\frac{3}{2}\sigma x^2 - 2 + \frac{3}{R_{\max}^4}x - x^3 = 0\ , \tag{10.48}$$

которые являются точками поворота

$$x_1 = \frac{3}{2}\sigma + 0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),\ \ x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + 0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\ . \tag{10.49}$$

Отсюда находим точку поворота

$$R_{\min} = \sqrt{\frac{2}{3\sigma}}\ . \tag{10.50}$$

Таким образом, благодаря массе гравитона в РТГ отсутствует космологическая особенность, и расширение Вселенной начинается с конечного ненулевого значения $R = R_{\min}$. На основании (10.46) получаем

$$\rho_{\max} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sigma\rho_{\min}}{R_{\min}^4} = \frac{27}{16}\sigma^3\cdot\rho_{\min}. \tag{10.51}$$

Согласно (10.49) выражение (10.47) можно записать в форме

$$H^2 = \omega(x_1 - x)(x - x_2)(x - x_3)\ . \tag{10.52}$$

В области изменения масштабного фактора

$$R_{\min} \leq R \leq R_0 \tag{10.53}$$

выражение для H^2 существенно упрощается

$$H^2 \simeq \omega x^2(x_1 - x) = \frac{3\sigma\omega}{2R^6}(R^2 - R_{\min}^2)\ . \tag{10.54}$$

Уравнение (10.47) в этом приближении принимает вид

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{3\sigma\omega}{2R^6}(R^2 - R_{\min}^2)\ . \tag{10.55}$$

После интегрирования находим

$$\tau = \frac{R^2_{\min}}{\sqrt{6\sigma\omega}}[Z\sqrt{Z^2-1} + \ln(Z+\sqrt{Z^2-1})] \,, \qquad (10.56)$$

где

$$Z = R/R_{\min}.$$

Используя выражения (10.50) и (10.51), получаем

$$\frac{R^2_{\min}}{\sqrt{6\sigma\omega}} = \frac{1}{2\sqrt{2\omega}}\left(\frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}\right)^{1/2} . \qquad (10.57)$$

Подставив в это выражение значение $\rho_{\min}$ из (10.32), находим

$$\frac{R^2_{\min}}{\sqrt{6\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\rho_{\max}}} \,. \qquad (10.58)$$

Учитывая (10.58) в (10.56), получим

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{32\pi G\rho_{\max}}}[Z\sqrt{Z^2-1} + \ln(Z+\sqrt{Z^2-1})] \,. \qquad (10.59)$$

В окрестности $R \simeq R_{\min}$ из (10.59) находим

$$R(\tau) = R_{\min}\left[1 + \frac{4\pi G}{3}\rho_{\max}\cdot\tau^2\right] \,. \qquad (10.60)$$

В области $R_{\min} \ll R < R_0$ получаем

$$R(\tau) = R_{\min}\left(\frac{32\pi G}{3}\rho_{\max}\right)^{1/4}\cdot\tau^{1/2}. \qquad (10.61)$$

В этой области зависимость плотности вещества от времени, определяемая уравнением (10.46), с учетом (10.50), (10.51) и (10.61) имеет вид

$$\rho(\tau) = \frac{3}{32\pi G\tau^2} \,, \qquad (10.62)$$

т.е. совпадает с известным выражением, которое дает модель Фридмана в ОТО для "плоской" Вселенной. Определим теперь время, отвечающее переходу от радиационно-доминантной стадии расширения Вселенной к стадии доминантности нерелятивистского вещества. Согласно (10.61) имеем

$$R_0^2 = R_{\min}^2 \left(\frac{32\pi G}{3}\rho_{\max}\right)^{1/2} \cdot \tau_0. \tag{10.63}$$

Отсюда, учитывая (10.44), (10.45) и (10.58), находим

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\rho_r^{3/2}(\tau_c)}{\rho_m^2(\tau_c)}\sqrt{\frac{3}{32\pi G}} = \\ &= 2,26 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{3}{32\pi G}} \simeq 1,5 \cdot 10^{11}\text{с}. \end{aligned} \tag{10.64}$$

Рассмотрим теперь развитие Вселенной, когда давлением можно пренебречь. На этой стадии эволюции уравнение (10.25) запишем в форме

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\omega x^2}{\alpha}(x-1)[(\alpha - x^3)(x^2+x+1) - 3x^2]\,. \tag{10.65}$$

Здесь $x = R_{\max}/R$, $\alpha = 2R_{\max}^6$. Учитывая, что

$$\alpha \gg 3\,, \tag{10.66}$$

найдем

$$\tau = \tau_0 + \sqrt{\frac{\alpha}{2\omega}}\int_x^{x_0} \frac{dy}{y\sqrt{(y^3-1)(x_1^3-y^3)}}\,, \tag{10.67}$$

где $x_0 = R_{\max}/R_0$, $x_1 = 2^{1/3} \cdot R_{\max}^2$. После интегрирования (10.67) получаем

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{2x_1\omega}}[\arcsin f(x_0) - \arcsin f(x)]. \tag{10.68}$$

Здесь

$$f(x) = \frac{(x_1^3+1)x^3 - 2x_1^3}{x^3(x_1^3-1)} . \tag{10.69}$$

Заметим, что

$$f(x_0) \simeq 1 - \frac{2}{x_0^3} , \tag{10.70}$$

$$\arcsin f(x_0) \simeq \arccos \frac{2}{x_0^{3/2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{x_0^{3/2}} . \tag{10.71}$$

Учитывая (10.71), находим

$$\tau = \tau_0 - \frac{2}{3\sqrt{2\omega}x_0^{3/2}} + \frac{1}{3\sqrt{2\omega}}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin f(x)\right] . \tag{10.72}$$

Принимая во внимание равенство

$$\tau_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\omega}x_0^{3/2}} , \tag{10.73}$$

выражение (10.72) можно записать в виде

$$3\sqrt{2\omega}(\tau + \beta\tau_0) = \frac{\pi}{2} - \arcsin f(x) . \tag{10.74}$$

Отсюда имеем

$$\cos\lambda(\tau + \beta\tau_0) = \frac{(\alpha+1)x^3 - 2\alpha}{x^3(\alpha-1)} , \tag{10.75}$$

где

$$\lambda = 3\sqrt{2\omega} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right), \;\; \beta = 1/3 . \tag{10.76}$$

Из выражения (10.75) находим

$$R(\tau) = \left[\frac{\alpha}{2}\right]^{1/6}\left[\frac{(\alpha+1) - (\alpha-1)\cos\lambda(\tau+\beta\tau_0)}{2\alpha}\right]^{1/3} . \tag{10.77}$$

В силу равенства (10.40) имеет место соотношение

$$\frac{\rho_m(\tau)}{\rho_{\min}} = \left[\frac{R_{\max}}{R(\tau)}\right]^3 , \tag{10.78}$$

учитывая (10.78), получаем

$$\rho_m(\tau) = \frac{2\alpha\rho_{\min}}{(\alpha+1) - (\alpha-1)\cos\lambda(\tau+\beta\tau_0)}\,. \qquad (10.79)$$

Поскольку $\alpha \gg 1$, из (10.79) имеем

$$\rho_m(\tau) = \frac{\rho_{\min}}{\sin^2\frac{\lambda(\tau+\beta\tau_0)}{2}}\,, \qquad (10.80)$$

аналогично из формулы (10.78) получаем

$$R(\tau) = R_{\max}\sin^{2/3}\frac{\lambda(\tau+\beta\tau_0)}{2}. \qquad (10.81)$$

В области значений $\frac{\lambda(\tau+\beta\tau_0)}{2} \ll 1$ имеем

$$\rho_m(\tau) = \frac{1}{6\pi G(\tau+\beta\tau_0)^2}\,, \qquad (10.82)$$

$$R(\tau) = R_{\max}\left[\frac{\lambda(\tau+\beta\tau_0)}{2}\right]^{2/3}. \qquad (10.83)$$

При $\tau \gg \beta\tau_0$ формулы (10.82) и (10.83) дают для $\rho_m(\tau)$ и $R(\tau)$ зависимости от времени, аналогичные тем, которые получаются в модели Фридмана в ОТО для “плоской” Вселенной.

Используя формулы (10.44), (10.45) и (10.51), легко установить следующее соотношение:

$$R_{\max} = \frac{\rho_m^{1/3}(\tau_c)}{\rho_r^{1/4}(\tau_c)}\left(\frac{\rho_{\max}}{4\rho_{\min}^2}\right)^{1/12} \simeq 3,6\cdot 10^{-2}\left(\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}^2}\right)^{1/12}. \qquad (10.84)$$

Аналогично с помощью выражения (10.57) и (10.50) можно через $\rho_{\max}$ выразить вторую точку поворота $R_{\min}$:

$$R_{\min} = \left(\frac{\rho_{\min}}{2\rho_{\max}}\right)^{1/6}. \qquad (10.85)$$

Из (10.84) и (10.85) очевидно, что наличие массы гравитона не только устраняет космологическую особенность, но и останавливает процесс расширения Вселенной, который переходит к фазе сжатия. Таким образом, эволюция однородной и изотропной Вселенной определяется современными данными наблюдений (10.41), максимальной плотностью вещества и массой гравитона. Скалярная кривизна максимальна в начале "расширения" и на основании (10.21), (10.24) и (10.85) равна следующему значению:

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -16\pi G \cdot \frac{\rho_{\max}}{c^2},$$

а ее минимальное значение в конце "расширения"

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{3}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 .$$

Начальное ускорение, которое и является "толчком", приведшим к "расширяющейся" Вселенной, согласно (10.24), (10.32) и (10.85) равно

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{1}{3}\left(8\pi G\rho_{\max}\right)^{5/6}\left(\frac{mc^2}{2\hbar}\right)^{1/3} .$$

Оно возникает в момент остановки роста плотности вещества в предшествующем цикле. Максимальная плотность вещества во Вселенной в данной модели остается неопределенной. Она связана с интегралом движения. Последнее легко установить. Запишем уравнение (10.24) в форме

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)R + \frac{8\pi G}{3}\rho R - 2\omega\left(R - \frac{1}{R^5}\right) . \quad (10.86)$$

Определяя из уравнения

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{d\tau} = -\frac{1}{3(\rho + \frac{p}{c^2})}\frac{d\rho}{d\tau} \quad (10.87)$$

величину $\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)$, находим

$$\rho + \frac{p}{c^2} = -\frac{1}{3}R\frac{d\rho}{dR} . \quad (10.88)$$

Подставляя эту величину в уравнение (10.86), получаем

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{4\pi G}{3} \cdot \frac{d}{dR}(\rho R^2) - \omega \frac{d}{dR}\left(R^2 + \frac{1}{2R^4}\right) . \qquad (10.89)$$

Вводя обозначение

$$V = -\frac{4\pi G}{3}\rho R^2 + \omega\left(R^2 + \frac{1}{2R^4}\right) , \qquad (10.90)$$

можно записать выражения (10.89) в форме уравнения движения Ньютона

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = -\frac{dV}{dR} , \qquad (10.91)$$

где V выполняет роль потенциала. Умножая (10.91) на $\frac{dR}{d\tau}$, получаем

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + V\right] = 0 . \qquad (10.92)$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + V = E , \qquad (10.93)$$

где E — интеграл движения, аналог энергии в классической механике. Сравнивая (10.93) с (10.25) и учитывая (10.31), получаем

$$R^4_{\max} = \frac{1}{8E}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 . \qquad (10.94)$$

Подставляя в (10.94) выражение (10.84), находим

$$E = 7,4 \cdot 10^4 \left[\frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^{10}}{(16\pi G)^2\rho_{\max}}\right]^{1/3} . \qquad (10.95)$$

Эта величина чрезвычайно мала.

Таким образом, $\rho_{\max}$ является фактически интегралом движения, который задается начальными условиями динамической системы. Проведенный анализ показывает, что модель однородной и изотропной Вселенной, согласно РТГ, развивается циклически от некоторой конечной максимальной плотности ρ_{max} до минимальной и т.д. Вселенная может быть только "плоской". Теория предсказывает наличие во Вселенной большой "скрытой" массы вещества. Вселенная бесконечна и существует бесконечное время, в течение которого происходил интенсивный обмен информацией между ее областями, что и привело к однородности и изотропии Вселенной с некоторой структурой неоднородности. В модели однородной и изотропной Вселенной для простоты исследования эта неоднородность не учитывается. Полученная информация рассматривается как нулевое приближение, на фоне которого обычно рассматривают развитие неоднородностей, обусловленных гравитационной неустойчивостью. "Расширение" в однородной и изотропной Вселенной, как мы убедились, обусловлено изменением гравитационного поля, при этом никакого движения вещества не происходит. Наличие некоторой структуры неоднородности распределения вещества в пространстве вносит существенное изменение, особенно в период после рекомбинации водорода, когда Вселенная становится прозрачной и давление излучения уже перестает препятствовать собиранию вещества в разных местах Вселенной.

Это обстоятельство приводит к движению вещества относительно инерциальной системы координат. Так возникают пекулярные скорости галактик относительно инерциальной системы. Систему координат, связанную с реликтовым излучением, с большой точностью можно было бы принять как инерциальную. Конечно, система координат, связанная с реликтовым гравитационным излучением, была бы в высшей степени близка к инерциальной системе. Какая максимальная плотность вещества ρ_{max} была ранее во Вселенной? Привлекательной возможностью является гипотеза о том, что ρ_{max} определяется мировыми постоянными. В этом случае в качестве ρ_{max} обычно фигурирует плотность Планка. При этом, однако, существует проблема перепроизводства монополей, возникающих в теориях Великого объединения. Для ее устранения обычно привлекается механизм "выжигания" монополей в процессе инфляционного расширения, обусловленного бозонами Хиггса. Наша модель дает другую, альтернативную возможность. Величина $\rho_{\max}$ может быть значительно меньше и плотности Планка. В этом случае температура ранней Вселенной может оказаться недостаточной для рождения монополей, и проблема их перепроизводства тривиальным образом снимается. Это, конечно, не исключает возможность инфляционного расширения Вселенной, если окажется, что на определенной стадии ее развития уравнение состояния будет $p = -\rho$.

Таким образом, согласно РТГ, никакого Большого точечного взрыва не было, а следовательно, не было и ситуации, когда расстояния между галактиками были чрезвычайно малыми. Вместо взрыва в каждой точке пространства было состояние вещества с большой плотностью и температурой, и оно далее развивается к настоящему моменту так, как это было описано выше. Различие в развитии однородной и изотропной Вселенной в РТГ и ОТО возникло из-за того, что масштабный фактор $R(\tau)$ в РТГ не обращается в нуль, тогда как в ОТО в какой-то момент в прошлом он обращается в нуль.

В ОТО с космологическим членом λ однородная и изотропная модель Вселенной возможна и при отсутствии вещества. Решение уравнений ОТО для данного случая было найдено де Ситтером. Это решение отвечает искривленному четырехмерному пространству-времени, что означает наличие гравитации и без вещества. Каков же источник этой гравитации? Источником обычно считают вакуумную энергию, которую и отождествляют с космологической постоянной λ. В РТГ при отсутствии вещества ($\rho = 0$), согласно уравнениям (10.25) и (10.31), правая часть должна обратиться в нуль, что возможно, только если $R_{\max} = 1$. Отсюда следует, что $R \equiv 1$, а, следовательно, геометрия пространства-времени в отсутствии вещества будет псевдоевклидовой. Таким образом, согласно РТГ, при отсутствии вещества во Вселенной гравитационное поле также отсутствует, а следовательно, вакуум не обладает энергией, как и должно быть. В соответствии с РТГ Вселенная не может существовать без вещества.

В заключение определим горизонт частиц и горизонт событий. Согласно интервалу (10.17), для светового луча имеем

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{a}R(\tau)} \,. \tag{10.96}$$

Расстояние, пройденное светом к моменту τ, равно

$$d_r(\tau) = \sqrt{a}R(\tau) \int\limits_0^{r(\tau)} dr = R(\tau) \int\limits_0^{\tau} \frac{d\sigma}{R(\sigma)} \,. \tag{10.97}$$

Если бы гравитационное поле отсутствовало, то расстояние, пройденное светом, было бы равно $c\tau$. В качестве R мы должны были бы подставить для интервала $(0, \tau_0)$ выражение (10.59), а для интервала времени (τ_0, τ) выражение (10.81). Для приближенной оценки $d_r(\tau)$ возьмем выражение

$$R(\tau) = R_{\max} \sin^{2/3} \frac{\pi\tau}{2\tau_{\max}} \tag{10.98}$$

во всем интервале интегрирования

$$d_r\,(\tau) = \frac{2\tau_{\max}}{\pi} \left[\sin \frac{\pi\tau}{2\tau_{\max}}\right]^{2/3} \int\limits_0^{\sqrt{y}} \frac{dx}{x^{2/3}\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{6\tau_{\max}}{\pi} \sqrt{y} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, y\right) \,. \tag{10.99}$$

Здесь $y = \sin^2 \frac{\pi\tau}{2\tau_{\max}}$, $F(a, b, c, y)$ — гипергеометрическая функция.

Приведем значения для некоторых величин, определяющих эволюцию однородной и изотропной Вселенной. Возьмем массу гравитона $m = 10^{-66}$г, а современное значение “постоянной” Хаббла

$$H_c \simeq 74 \frac{\text{км}}{\text{с МПС}} . \tag{10.100}$$

Тогда для настоящего времени τ_c, q_c соответственно равны

$$\tau_c \simeq 3 \cdot 10^{17}\text{с}, \quad q_c = 0,59, \quad \rho_c = 10^{-28} \frac{\text{г}}{\text{см}^3} . \tag{10.101}$$

Согласно формуле (10.33) полупериод циклического развития равен

$$\tau_{\max} = 9\pi \cdot 10^{17}\text{с}. \tag{10.102}$$

Следует подчеркнуть, что параметры τ_c, q_c, определяющие эволюцию Вселенной, практически не зависят от значения максимальной плотности вещества $\rho_{\max}$. Максимальная температура (а следовательно, и максимальная плотность), которая могла бы быть во Вселенной, может определяться такими явлениями, происходящими в этих экстремальных условиях, последствия которых можно наблюдать в настоящее время. Особую роль при этом играет гравитационное поле, которое содержит наиболее полную информацию об экстремальных условиях во Вселенной. В рассмотренной выше модели изотропной и однородной Вселенной не возникают известные проблемы: сингулярности, причинности, плоскостности, которые имеют место в ОТО.

Используя (10.99) и (10.101), находим размер наблюдаемой части Вселенной в момент τ_c

$$d_r(\tau_c) \simeq 3c\tau_c = 2,7 \cdot 10^{28}\text{см} .$$

Мы видим, что путь, пройденный светом в гравитационном поле Вселенной за время τ_c, в три раза превышает расстояние в отсутствии гравитационного поля $c\tau_c$. За время полупериода эволюции $\tau_{\max}$ горизонт частиц будет равен

$$d_r(\tau_{\max}) = \frac{c\tau_{\max}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)} . \tag{10.103}$$

Горизонт событий определяется выражением

$$d_c = R(\tau) \int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{d\sigma}{R(\sigma)} \,. \tag{10.104}$$

Поскольку интеграл (10.104) обращается в бесконечность, горизонт событий в нашем случае отсутствует. Это означает, что из любой области Вселенной к нам придет информация о событиях, происходящих в ней в момент времени τ. Эту информацию можно получить с помощью гравитационных волн, поскольку они способны пройти через периоды, когда была большая плотность вещества.

Особо отметим, что в рамках РТГ однородная и изотропная Вселенная возможна лишь при отличной от нуля массе гравитона. Действительно, согласно (10.46) и (10.51), постоянная A в выражении (10.35) равна $A = \rho_{\max}^{1/3} \left(\frac{\rho_{\min}}{2}\right)^{2/3}$. Поэтому при фиксированном значении $\rho_{\max}$ постоянная A обращается в нуль при $m = 0$.

11. Гравитационное поле сферически-симметричного статического тела

Вопрос о том, что происходит в окрестности сферы Шварцшильда при наличии массы покоя гравитона, впервые был рассмотрен в релятивистской теории гравитации в работе [2] и сделан вывод: в вакууме на сфере Шварцшильда метрический коэффициент эффективного риманова пространства g_{00} отличен от нуля, тогда как g_{11} имеет полюс. Эти изменения, возникшие в теории из-за массы гравитона, приводят к эффекту "отскока" падающих частиц и света от сингулярности на сфере Шварцшильда, а следовательно, к отсутствию "черных дыр".

В дальнейшем в [14] был проведен подробный анализ этой задачи в РТГ, который уточнил ряд вопросов, но в то же время показал, что "отскок" происходит вблизи сферы Шварцшильда. В данной монографии мы следуем статье [13], в которой наиболее просто и ясно показано, что в той точке в вакууме, где метрический коэффициент эффективного риманова пространства g_{11} имеет полюс, другой метрический коэффициент g_{00} не обращается в нуль. Возникшая вследствие этого особенность неустранима выбором системы координат, а поэтому невозможно сшить решение внутри тела с внешним решением. В этом случае, если перейти в систему координат, связанную с падающим пробным телом, то оказывается, что пробное тело никогда не достигнет поверхности тела, являющегося источником гравитационного поля. Это обстоятельство и приводит к заключению, что радиус тела не может быть меньше радиуса Шварцшильда. Все это мы подробно рассмотрим в данном разделе.

Запишем уравнения (5.19), (5.20) в форме

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \left(\delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha}\gamma_{\alpha\nu} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right) = \kappa T^\mu_\nu, \qquad (11.1)$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 \,. \qquad (11.2)$$

Здесь $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, $g = \det\, g_{\mu\nu}$; R^μ_ν — тензор Риччи, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, G — гравитационная постоянная; D_μ — ковариантная производная в пространстве Минковского; $\gamma_{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор пространства Минковского в произвольных криволинейных координатах.

Определим теперь гравитационное поле, создаваемое сферически-симметричным статическим источником. Общий вид интервала эффективного риманова пространства для такого источника имеет вид

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdr + g_{11}dr^2 + g_{22}d\Theta^2 + g_{33}d\Phi^2. \qquad (11.3)$$

Введем обозначения

$$g_{00}(r) = U(r), \quad g_{01}(r) = B(r),$$
$$g_{11}(r) = -\left[V(r) - \frac{B^2(r)}{U(r)}\right], \qquad (11.4)$$
$$g_{22}(r) = -W^2(r), \quad g_{33}(r,\Theta) = -W^2(r)\sin^2\Theta.$$

Компоненты контрвариантного метрического тензора равны

$$g^{00}(r) = \frac{1}{U}\left(1 - \frac{B^2}{UV}\right), \; g^{01}(r) = -\frac{B}{UV}, \; g^{11}(r) = -\frac{1}{V},$$
$$g^{22}(r) = -\frac{1}{W^2}, \; g^{33}(r,\Theta) = -\frac{1}{W^2\sin^2\Theta}. \qquad (11.5)$$

Детерминант метрического тензора $g_{\mu\nu}$ равен

$$g = \det g_{\mu\nu} = -UVW^4\sin^2\Theta \,. \qquad (11.6)$$

Для решения, имеющего физический смысл, должно выполняться условие

$$g < 0 . \tag{11.7}$$

Для сферических координат допускается обращение g в нуль только в точке $r = 0$. На основании (11.5) и (11.6) найдем компоненты плотности метрического тензора

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}. \tag{11.8}$$

Они имеют вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}^{00} = \frac{W^2}{\sqrt{UV}}\left(V - \frac{B^2}{U}\right)\sin\Theta,\ \tilde{g}^{01} = -\frac{BW^2}{\sqrt{UV}}\sin\Theta, \\
&\tilde{g}^{11} = -\sqrt{\frac{U}{V}}W^2\sin\Theta, \\
&\tilde{g}^{22} = -\sqrt{UV}\sin\Theta,\ \ \tilde{g}^{33} = -\frac{\sqrt{UV}}{\sin\Theta} .
\end{aligned} \tag{11.9}$$

Все рассмотрение будем проводить в инерциальной системе в сферических координатах. Интервал в пространстве Минковского имеет вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) . \tag{11.10}$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля в пространстве Минковского, определяемые по формуле

$$\gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\lambda\sigma}(\partial_\mu\gamma_{\sigma\nu} + \partial_\nu\gamma_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\gamma_{\mu\nu}), \tag{11.11}$$

равны

$$\begin{aligned}
&\gamma^1_{22} = -r\ \gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta,\ \gamma^2_{12} = \gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \\
&\gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta,\ \gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\Theta .
\end{aligned} \tag{11.12}$$

Запишем уравнение (11.2) в развернутом виде

$$D_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma}\tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0 . \tag{11.13}$$

В галилеевых координатах пространства Минковского они имеют вид

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{11.14}$$

В случае статического гравитационного поля из (11.14) имеем

$$\partial_i \tilde{g}^{i\nu} = 0, \; i = 1,2,3 \,. \tag{11.15}$$

Используя тензорный закон преобразования, можно выразить компоненты $\tilde{g}^{i0}$ в декартовых координатах через компоненты в сферических координатах

$$\tilde{g}^{i0} = -\frac{BW^2}{\sqrt{UV}} \cdot \frac{x^i}{r^3} \,, \sqrt{-g} = \sqrt{UV} W^2 r^{-2}, \tag{11.16}$$

где x^i — пространственные декартовы координаты. Полагая в (11.15) $\nu = 0$ и интегрируя по сферическому объему после применения теоремы Гаусса–Остроградского, получим интеграл по поверхности сферы

$$\oint \tilde{g}^{i0} ds_i = -\frac{BW^2}{r^3\sqrt{UV}} \oint (\vec{x} d\vec{s}) = 0 \,. \tag{11.17}$$

Принимая во внимание равенство

$$\oint (\vec{x} d\vec{s}) = 4\pi r^3, \tag{11.18}$$

получим

$$\frac{BW^2}{\sqrt{UV}} = 0 \,. \tag{11.19}$$

Поскольку уравнение (11.14) справедливо как внутри вещества, так и вне его, (11.19) должно выполняться для любого значения r. Но так как в силу (11.7) U, V и W не могут равняться нулю, то из (11.19) следует

$$B = 0 \,. \tag{11.20}$$

Интервал (11.3) эффективного риманова пространства принимает вид

$$ds^2 = Udt^2 - Vdr^2 - W^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) \,. \tag{11.21}$$

На основании (11.20) следует, что не существует статического решения уравнений Гильберта–Эйнштейна в гармонических координатах, содержащего в интервале член вида

$$B(r)dtdr\ . \tag{11.22}$$

Тензор энергии-импульса вещества имеет вид

$$T^{\mu}_{\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) v^{\mu} v_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu} \cdot \frac{p}{c^2}\ . \tag{11.23}$$

В выражении (11.23) ρ — плотность массы вещества, p — изотропное давление, а

$$v^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} \tag{11.24}$$

— четырехскорость, удовлетворяющая условию

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 1\ . \tag{11.25}$$

Из уравнений (11.1) и (11.2) следует

$$\nabla_{\mu} T^{\mu}_{\nu} = 0\ , \tag{11.26}$$

где ∇_{μ} — ковариантная производная в эффективном римановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. В случае статического тела

$$v^{i} = 0\ \ (i = 1, 2, 3),\ \ v^{0} = \frac{1}{\sqrt{U}}\ , \tag{11.27}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} &T^{0}_{0} = \rho(r),\ \ T^{1}_{1} = T^{2}_{2} = T^{3}_{3} = -\frac{p(r)}{c^2}\ , \\ &T^{\mu}_{\nu} = 0,\ \ \mu \neq \nu\ . \end{aligned} \tag{11.28}$$

Для интервала (11.21) символы Кристоффеля, отличные от нуля, равны

$$\begin{aligned} &\Gamma^{0}_{01} = \frac{1}{2U}\frac{dU}{dr}\ , \Gamma^{1}_{00} = \frac{1}{2V}\frac{dU}{dr}\ , \Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}\ , \\ &\Gamma^{1}_{22} = -\frac{W}{V}\frac{dW}{dr}, \Gamma^{1}_{33} = \sin^2\Theta \cdot \Gamma^{1}_{22}\ , \\ &\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{3}_{13} = \frac{1}{W}\frac{dW}{dr},\ \ \Gamma^{2}_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta\ ,\quad \Gamma^{3}_{23} = \operatorname{ctg}\Theta. \end{aligned} \tag{11.29}$$

Используя выражение для тензора Риччи

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} +$$

$$+\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\ , \ R^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu} \qquad (11.30)$$

и подставляя в него выражения для символов Кристоффеля из (11.29), уравнения (11.1) для функций U, V и W можно привести к виду

$$\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - \frac{2}{VW}\frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{V}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right) - \frac{r^2}{W^2}\right] = \kappa\rho\ , \qquad (11.31)$$

$$\frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2}\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - \frac{1}{UVW}\frac{dW}{dr}\ \frac{dU}{dr} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right) - \frac{r^2}{W^2}\right] = -\kappa\frac{p}{c^2}, \qquad (11.32)$$

$$-\frac{1}{VW}W'' - \frac{1}{2UV}U'' + \frac{1}{2WV^2}W'V' + \frac{1}{4VU^2}(U')^2 +$$

$$+\frac{1}{4UV^2}U'V' - \frac{1}{2UVW}W'U' +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\right] = -\kappa\frac{p}{c^2}\ . \qquad (11.33)$$

Уравнение (11.13) с учетом (11.12), (11.9) и (11.20) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dr}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}W^2\right) = 2r\sqrt{UV}\ . \qquad (11.34)$$

Заметим, что в силу тождества Бьянки и уравнения (11.2) одно из уравнений (11.31) – (11.33) является следствием остальных. В дальнейшем в качестве независимых мы возьмем уравнения (11.31), (11.32) и (11.34).

Выражение (11.26) запишем в развернутом виде

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu \equiv \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} T^\mu_\alpha = 0 \,. \qquad (11.35)$$

Используя формулы (11.28) и (11.29), получим

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dp}{dr} = -\frac{\rho + \frac{p}{c^2}}{2U} \cdot \frac{dU}{dr} \,. \qquad (11.36)$$

Принимая во внимание тождество

$$\frac{1}{W^2 \left(\frac{dW}{dr}\right)} \frac{d}{dr} \left[\frac{W}{V} \left(\frac{dW}{dr}\right)^2\right] = \frac{1}{VW^2} \left(\frac{dW}{dr}\right)^2 +$$

$$+\frac{2}{VW} \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{V}\right) , \qquad (11.37)$$

уравнение (11.31) можно записать в форме

$$1 - \frac{d}{dW} \left[\frac{W}{V \left(\frac{dr}{dW}\right)^2}\right] + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \left[W^2 - r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{W^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\right] = \kappa W^2 \rho \,. \qquad (11.38)$$

Аналогично преобразуем уравнение (11.32):

$$1 - \frac{W}{V \left(\frac{dr}{dW}\right)^2} \frac{d}{dW} \ln(UW) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \left[W^2 - r^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\right] = -\kappa \frac{W^2 p}{c^2} \,. \qquad (11.39)$$

Уравнения (11.34) и (11.36) запишем в виде

$$\frac{d}{dW} \left(W^2 \sqrt{\frac{U}{V}}\right) = 2r\sqrt{UV} \frac{dr}{dW} \,, \qquad (11.40)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{dp}{dW} = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \frac{1}{2U} \frac{dU}{dW} \,. \qquad (11.41)$$

Перейдем в уравнениях (11.38) – (11.41) к безразмерным переменным. Пусть l — радиус Шварцшильда источника, масса которого равна M, тогда

$$l = \frac{2GM}{c^2}\,. \tag{11.42}$$

Введем новые переменные x и z, равные

$$W = lx,\;\; r = lz. \tag{11.43}$$

Уравнения (11.38) – (11.41) принимают вид

$$1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{V\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right) + \epsilon\Big[x^2 - z^2 +$$

$$+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\Big] = \tilde{\kappa}x^2\rho(x), \tag{11.38a}$$

$$1 - \frac{x}{V\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\frac{d}{dx}\ln(xU) + \epsilon\Big[x^2 - z^2 -$$

$$-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V}\right)\Big] = -\tilde{\kappa}\frac{x^2 p(x)}{c^2}\,, \tag{11.39a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{\frac{U}{V}}\right) = 2z\frac{dz}{dx}\sqrt{UV}\,, \tag{11.40a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dx} = -\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{1}{2U}\frac{dU}{dx}\,. \tag{11.41a}$$

Здесь ϵ — безразмерная постоянная, равная

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{2GMm}{\hbar c}\right)^2,\;\; \tilde{\kappa} = \kappa l^2. \tag{11.44}$$

Сумма и разность уравнений (11.38a) и (11.39a) равны

$$2 - \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{V\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right] - \frac{x}{V\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\frac{d}{dx}\ln(xU) +$$

$$+ 2\epsilon(x^2 - z^2) = \tilde{\kappa}x^2\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)\,, \tag{11.45}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{V\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right]-\frac{x}{V\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\frac{d}{dx}\ln(xU)-$$

$$-\epsilon x^2\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\right)=-\tilde{\kappa}x^2\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\ . \tag{11.46}$$

Введем новые функции A и η:

$$U=\frac{1}{x\eta A},\ V=\frac{x}{A\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\ . \tag{11.47}$$

В этих новых переменных уравнение (11.45) принимает вид

$$A\frac{d\ln\eta}{dx}+2+2\epsilon(x^2-z^2)=\tilde{\kappa}x^2\left(\rho-\frac{p}{c^2}\right)\ . \tag{11.48}$$

Уравнение (11.38а) записывается в форме

$$\frac{dA}{dx}=1+\epsilon(x^2-z^2)+\epsilon\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{U}-\frac{1}{V}\right)-\tilde{\kappa}x^2\rho(x)\ . \tag{11.49}$$

Согласно условию причинности (см. дополнение)

$$\gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu=0\ , \tag{11.50}$$

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu\le 0\ , \tag{11.50a}$$

легко установить неравенство

$$U\le V\ . \tag{11.51}$$

Для нашей задачи можно ограничиться только значениями x и z из интервала

$$0\le x\ll\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}},\ 0\le z\ll\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}}. \tag{11.52}$$

Эти неравенства ограничивают сверху r, W значением

$$r, W\ll\frac{\hbar}{mc}\ . \tag{11.53}$$

При таком ограничении уравнение (11.49) принимает вид

$$\frac{dA}{dx} = 1 + \epsilon \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) - \tilde{\kappa} x^2 \rho(x) \,. \tag{11.54}$$

Вне вещества имеем

$$\frac{dA}{dx} = 1 + \epsilon \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \,. \tag{11.55}$$

В силу условия причинности (11.51) вне вещества имеет место неравенство

$$\frac{dA}{dx} \geq 1. \tag{11.56}$$

Интегрируя (11.54) в интервале $(0, x)$, получим

$$A(x) = x + \frac{\epsilon}{2} \int\limits_0^x x'^2 \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) dx' - \tilde{\kappa} \int\limits_0^x x'^2 \rho(x') dx'. \tag{11.57}$$

В (11.57) $A(0)$ положена равной нулю, поскольку если бы она была отлична от нуля, то функция $V(x)$ обратилась бы в нуль при x, стремящемся к нулю, что физически недопустимо. На основании (11.56) функция $A(x)$ вне вещества монотонно возрастает по x, а поэтому она может иметь только один корень

$$A(x_1) = 0, \quad x_1 > x_0. \tag{11.58}$$

На основании (11.57) имеем

$$x_1 = 1 - \frac{\epsilon}{2} \int\limits_0^{x_1} x'^2 \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) dx'. \tag{11.59}$$

Здесь мы учли, что при выборе l равным (11.42)

$$\tilde{\kappa} \int\limits_0^{x_0} x'^2 \rho(x') dx' = 1.$$

Вещество сосредоточено в сфере $0 \le x \le x_0$. Далее мы будем рассматривать случай, когда радиус тела x_0 меньше, чем x_1. Именно в этом случае в вакууме, т.е. вне тела, будет иметь место сингулярность, которую нельзя устранить выбором системы координат.

Из-за массы гравитона нуль функции A сдвинут во внутрь сферы Шварцшильда. Так как при x, стремящемся к x_1, $V(x)$ стремится к бесконечности, поскольку $A(x)$ стремится к нулю, то найдется такая окрестность точки x_1

$$x_1(1-\lambda_1) \le x \le x_1(1+\lambda_2), \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\ , \tag{11.60}$$

(λ_1 и λ_2 принимают малые фиксированные значения), в которой будет иметь место неравенство

$$\frac{1}{U} \gg \frac{1}{V}\ . \tag{11.61}$$

В этом приближении получим

$$A(x) = x - x_1 + \frac{\epsilon}{2}\int\limits_{x_1}^{x} dx' x'^2 \frac{1}{U}\ . \tag{11.62}$$

Подставляя в это выражение U в форме (11.47), найдем

$$A(x) = x - x_1 + \frac{\epsilon}{2}\int\limits_{x_1}^{x} dx' x'^3 \eta(x') A(x'). \tag{11.63}$$

В области изменения x в интервале (11.60) в подынтегральном выражении можно заменить x^3 на x_1^3:

$$A(x) = x - x_1 + \frac{\epsilon}{2} x_1^3 \int\limits_{x_1}^{x} \eta(x') A(x') dx'. \tag{11.64}$$

Отсюда получим

$$\frac{dA}{dx} = 1 + \frac{\epsilon}{2} x_1^3 \eta(x) A(x). \tag{11.65}$$

В рассматриваемом приближении (11.52) уравнение (11.48) принимает вид

$$A\frac{d\ln\eta}{dx}+2=0\ . \tag{11.66}$$

Введем новую функцию

$$f(x)=\frac{x_1^3}{2}\eta(x)A(x)\ . \tag{11.67}$$

Уравнение (11.65) принимает вид

$$\frac{dA}{dx}=1+\epsilon f(x)\ , \tag{11.68}$$

а уравнение (11.66) принимает форму

$$\frac{A}{f}\cdot\frac{df}{dx}-\frac{dA}{dx}=-2\ . \tag{11.69}$$

Из уравнений (11.68) и (11.69) находим

$$A(x)=-\frac{(1-\epsilon f)f}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)}\ . \tag{11.70}$$

Из выражения (11.67) получим

$$\eta(x)=-\frac{2\dfrac{df}{dx}}{x_1^3(1-\epsilon f)}\ . \tag{11.71}$$

Подставляя (11.70) и (11.71) в (11.47), найдем

$$U=\frac{x_1^3}{2xf},\quad V=-\frac{x\dfrac{df}{dx}}{f(1-\epsilon f)\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}\ . \tag{11.72}$$

Используя эти выражения, детерминант g можно записать в форме

$$g = \frac{x_1^3 \dfrac{df}{dx} x^4}{2f^2 \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2 (1-\epsilon f)} \sin^2 \Theta < 0 \, . \tag{11.73}$$

Для выполнения условия (11.7) необходимо, чтобы выражения $\frac{df}{dx}$ и $(1 - \epsilon f)$ имели разные знаки. Подставляя (11.70) в (11.68), получаем

$$\frac{d}{dx} \ln \left| \frac{df}{dx} \right| - \frac{d}{dx} \ln |f(1-\epsilon f)| = \frac{1+\epsilon f}{f(1-\epsilon f)} \frac{df}{dx} \, . \tag{11.74}$$

Отсюда находим

$$\frac{d}{dx} \ln \left| \frac{(1-\epsilon f)\dfrac{df}{dx}}{f^2} \right| = 0 \, . \tag{11.75}$$

Таким образом

$$\left| \frac{(1-\epsilon f)\frac{df}{dx}}{f^2} \right| = C_0 > 0 \, . \tag{11.76}$$

Учитывая, что величины $(1-\epsilon f)$ и $\frac{df}{dx}$ должны иметь разные знаки, находим

$$\frac{df}{dx} = -\frac{C_0 f^2}{(1-\epsilon f)} \, . \tag{11.77}$$

Подставляя это выражение в (11.70), получим

$$A(x) = \frac{(1-\epsilon f)^2}{C_0 f}, \quad A(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad f = \frac{1}{\epsilon} \, . \tag{11.78}$$

С учетом (11.78) выражение (11.47) для функции V принимает вид

$$V = \frac{C_0 x f}{(1-\epsilon f)^2 \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} \, . \tag{11.79}$$

Интегрируя (11.77) и учитывая (11.78), получим

$$C_0 \cdot (x - x_1) = \frac{1}{f} + \epsilon \ln \epsilon |f| - \epsilon \,. \tag{11.80}$$

Соотношение (11.80) получено в области значений x, определяемой неравенствами (11.60), однако оно верно и для той области, где влиянием массы гравитона можно пренебречь.

Согласно (11.60), область изменения $C_0(x - x_1)$ заключена в пределах

$$-C_0 x_1 \lambda_1 \le C_0(x - x_1) \le C_0 x_1 \lambda_2, \tag{11.81}$$

когда f положительно, оно удовлетворяет неравенствам

$$\tilde{C} \le f \le \frac{1}{\epsilon} \,. \tag{11.82}$$

Используя (11.80), согласно (11.81) имеем

$$\frac{1}{f} + \epsilon \ln \epsilon f - \epsilon \le C_0 x_1 \lambda_2 .$$

Отсюда можно найти $\tilde{C}$:

$$\frac{1}{\tilde{C}} + \epsilon \ln \epsilon \tilde{C} - \epsilon = C_0 x_1 \lambda_2 . \tag{11.83}$$

Из выражения (11.83) находим приближенное значение для $\tilde{C}$:

$$\tilde{C} = \frac{1}{C_0 x_1 \lambda_2} \,. \tag{11.84}$$

Для отрицательных значений f точке $x = x_1$ соответствует следующее значение $|f|$, определяемое из уравнения

$$-\frac{1}{|f|} + \epsilon \ln \epsilon |f| - \epsilon = 0 \,. \tag{11.85}$$

Отсюда находим

$$|f| = \frac{a}{\epsilon}, \ \ln a = \frac{1+a}{a} . \tag{11.86}$$

Согласно (11.81) должно выполняться неравенство

$$-C_0 x_1 \lambda_1 \le -\frac{1}{|f|} + \epsilon \ln \epsilon |f| - \epsilon . \tag{11.87}$$

Отсюда можно найти нижнюю границу для $|f| = D$

$$-C_0 x_1 \lambda_1 = -\frac{1}{D} + \epsilon \ln \epsilon D - \epsilon . \tag{11.88}$$

Из выражения (11.88) находим приближенное значение для D

$$D = \frac{1}{C_0 x_1 \lambda_1} . \tag{11.89}$$

Это означает, что величина $|f|$ удовлетворяет неравенству

$$|f| \ge D = \frac{1}{C_0 x_1 \lambda_1} . \tag{11.89a}$$

Установим теперь зависимость переменной z от x. Подставляя (11.47) в (11.40a) и учитывая (11.48), получим

$$A\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right) = 2z - x\frac{dz}{dx}\Big[1 + \epsilon(x^2 - z^2) -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}x^2\left(\rho - \frac{p}{c^2}\right)\Big] . \tag{11.90}$$

В приближении (11.52) вне вещества уравнение (11.90) принимает вид

$$A\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right) + x\frac{dz}{dx} - 2z = 0 . \tag{11.91}$$

Нам необходимо найти регулярное решение $z(x)$ уравнения (11.91). В формуле (11.91) перейдем от переменной x к f. Используя соотношение (11.80)

$$x = \frac{1}{C_0 f}[C_0 x_1 f + 1 - \epsilon f + \epsilon f \ln \epsilon |f|] \tag{11.92}$$

и учитывая (11.65), (11.66) и (11.83), уравнение (11.91) можно представить в форме

$$\frac{d^2 z}{df^2} + \frac{C_0 x f + \epsilon f - 1}{C_0 f^2 x} \frac{dz}{df} - \frac{2z}{C_0 f^3 x} = 0\,. \tag{11.93}$$

Прямой подстановкой можно установить, что выражение

$$z = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{C_0 f}[1 - \epsilon f + \epsilon f \ln \epsilon |f|] \tag{11.94}$$

удовлетворяет уравнению (11.93) с точностью до величины

$$\epsilon \frac{(1 - \epsilon f + \ln \epsilon |f|)}{C_0^2 x f^3}\,, \tag{11.95}$$

которая чрезвычайно мала в окрестности точки x_1. Из выражений (11.92) и (11.94) находим

$$z = x - \frac{x_1}{2}\,. \tag{11.96}$$

Учитывая это соотношение, а также (11.79) и (11.72), получим

$$U = \frac{x_1^3}{2xf}, \quad V = \frac{C_0 x f}{(1 - \epsilon f)^2}. \tag{11.97}$$

Для отрицательных значений f условие причинности (11.51) принимает вид

$$|f|^2 (2x^2 C_0 - \epsilon^2 x_1^3) - 2\epsilon x_1^3 |f| - x_1^3 \le 0. \tag{11.98}$$

Неравенство (11.98) не выполняется, поскольку оно не удовлетворяет неравенству (11.89a). Таким образом в области отрицательных значений f нарушается принцип причинности. Это означает, что в области $x_1(1 - \lambda_1) \le x < x_1$

решение не имеет физического смысла. При $x_0 < x_1(1-\lambda_1)$ возникает ситуация, когда физическое решение внутри тела $0 \le x \le x_0$ невозможно сшить с физическим решением в области $x > x_1$, поскольку существует промежуточная область $x_1(1-\lambda_1) \le x < x_1$, в которой решение не удовлетворяет принципу причинности. Отсюда с необходимостью следует, что $x_0 \ge x_1$. С физической точки зрения следует исключить и равенство $x_0 = x_1$, поскольку решение внутри тела должно непрерывно переходить во внешнее решение. Следовательно, переменная f принимает только положительные значения. Для значений из области $x \ge x_1(1+\lambda_2)$ в уравнениях (11.38a) и (11.39a) можно опустить члены, содержащие малый параметр ϵ. Тем самым мы придем к внешнему решению Шварцшильда

$$z_s = (x-\omega)\left[1 + \frac{b}{2\omega}\ln\frac{x-2\omega}{x}\right], \tag{11.99}$$

$$V_s = \frac{x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 (x-2\omega)}, U_s = \frac{x-2\omega}{x}. \tag{11.100}$$

Здесь ω и b — некоторые постоянные, которые определяются из условия сшивания решения (11.96), (11.97) с решением (11.99), (11.100). В точке $x = x_1(1+\lambda_2)$ функция z из (11.96) равна

$$z = x_1\left(\frac{1}{2} + \lambda_2\right), \tag{11.101}$$

в этой же точке z_s равна

$$z_s = [x_1(1+\lambda_2) - \omega]\left[1 + \frac{b}{2\omega}\ln\frac{x_1(1+\lambda_2) - 2\omega}{x_1(1+\lambda_2)}\right]. \tag{11.102}$$

Из условия сшивания (11.101) и (11.102) находим

$$\omega = \frac{x_1}{2}, \quad b = 0. \tag{11.103}$$

В точке $x = x_1(1+\lambda_2)$ функция U из (11.97) равна

$$U = \frac{x_1^3}{2x_1(1+\lambda_2)\tilde{C}}, \tag{11.104}$$

поскольку $\tilde{C}$, согласно (11.84), равно

$$\tilde{C} = \frac{1}{C_0 x_1 \lambda_2} . \tag{11.105}$$

Подставляя (11.105) в (11.104), получим

$$U = \frac{C_0 x_1^3 \lambda_2}{2(1+\lambda_2)} , \tag{11.106}$$

в той же точке с учетом (11.103) U_s равна

$$U_s = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} . \tag{11.107}$$

Из условия сшивания (11.106) и (11.107) находим

$$C_0 = \frac{2}{x_1^3} . \tag{11.108}$$

В точке $x = x_1(1+\lambda_2)$ функция V из (11.97) равна

$$V = C_0 x_1 (1+\lambda_1)\tilde{C} . \tag{11.109}$$

Подставляя в (11.109) значение $\tilde{C}$ из (11.105), получим

$$V = \frac{1+\lambda_2}{\lambda_2} , \tag{11.110}$$

в той же точке V_s с учетом (11.99) и (11.103) равна

$$V_s = \frac{1+\lambda_2}{\lambda_2} , \tag{11.111}$$

т.е. решение для V сшивается с решением для V_s.

Таким образом, если радиус тела превышает радиус Шварцшильда, то влиянием массы гравитона можно пренебречь, и интервал эффективного риманова пространства в инерциальной системе в сферических координатах вне тела в области (11.53) имеет вид

$$ds^2 = \frac{r - GM}{r + GM}dt^2 - \frac{r + GM}{r - GM}dr^2 -$$
$$-(r + GM)^2[(d\Theta)^2 + \sin^2\Theta(d\varphi)^2].$$

Это выражение определяется однозначно из полной системы уравнений (11.1) и (11.2), при этом отсутствует какой-либо произвол. При сшивании решения внутри тела с внешним решением, как впервые показал Р. Авакян, необходимо еще учитывать логарифмический член (11.99), который возникает при решении уравнений (11.2). Однако, поскольку радиус Солнца намного превышает радиус Шварцшильда, его можно не учитывать при вычислении гравитационных эффектов в Солнечной системе.

Рассмотрим (11.92) для значений ϵf, близких к единице,

$$f = \frac{1}{\epsilon\left(1 + \frac{y}{\epsilon}\right)}, \quad \frac{y}{\epsilon} \ll 1. \tag{11.112}$$

Подставляя это выражение в (11.92) и разлагая по $\frac{y}{\epsilon}$, получим

$$y^2 = 2\epsilon C_0(x - x_1). \tag{11.113}$$

Неравенство (11.112) означает, что величина $(x - x_1) = \delta \ll \epsilon$, т.е.

$$\frac{y}{\epsilon} = \sqrt{2C_0}\sqrt{\frac{x - x_1}{\epsilon}} \ll 1\,. \tag{11.114}$$

Подставляя (11.113) в (11.112), а затем f в (11.97), получим для U и V следующие выражения:

$$\begin{aligned} U &= \frac{x_1^3[\epsilon + \sqrt{2\epsilon C_0(x - x_1)}]}{2x}, \\ V &= \frac{x[\epsilon + \sqrt{2\epsilon C_0(x - x_1)}]}{2\epsilon(x - x_1)}\,. \end{aligned} \tag{11.115}$$

Отсюда в области переменной x, удовлетворяющей неравенству (11.114), имеем

$$U = \frac{\epsilon x_1^3}{2x}, \quad V = \frac{x}{2(x - x_1)} . \qquad (11.116)$$

Мы видим, что наличие массы гравитона существенно изменяет характер решения в области, близкой к гравитационному радиусу. В той точке, где функция V, согласно (11.116), имеет полюс, функция U отлична от нуля, тогда как в общей теории относительности она равна нулю. Именно в силу этого обстоятельства и возникает в ОТО неотвратимый гравитационный коллапс, в ходе которого и появляются "черные дыры" (объекты, не имеющие материальных границ и "отрезанные" от внешнего мира). В РТГ "черные дыры" невозможны.

Если учесть (11.42), (11.43), (11.96) и пренебречь вторым членом в (11.59), то выражения (11.116) для U и V принимают вид

$$U = \left(\frac{GMm}{\hbar c}\right)^2, \quad V = \frac{1}{2} \cdot \frac{r + \frac{GM}{c^2}}{r - \frac{GM}{c^2}}, \qquad (11.117)$$

что совпадает с формулами, приведенными в работе [2]. Заметим, что вычет в полюсе у функции V при $\epsilon \neq 0$ равен $\frac{GM}{c^2}$, тогда как при $\epsilon = 0$ он равен $\frac{2GM}{c^2}$. Это вызвано тем, что в случае $\epsilon = 0$ полюс функции V в точке $x = x_1$ возникает из-за функции f, которая имеет в этой точке полюс, тогда как при $\epsilon \neq 0$ он появляется из-за функции $(1 - \epsilon f)$, которая, согласно (11.92), обращается в точке $x = x_1$ в нуль.

Сравним теперь характер движения пробных тел в эффективном римановом пространстве с метрикой (11.117) и метрикой Шварцшильда. Интервал (11.21) риманова пространства запишем в форме

$$ds^2 = Udt^2 - \tilde{V}dW^2 - W^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) . \qquad (11.118)$$

Здесь $\tilde{V}$ равна

$$\tilde{V}(W) = V\left(\frac{dr}{dW}\right)^2 . \tag{11.119}$$

Движение пробного тела происходит по геодезической линии риманова пространства

$$\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0 , \tag{11.120}$$

где

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} , \tag{11.121}$$

четырехвектор скорости v^μ удовлетворяет условию

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1 . \tag{11.122}$$

Рассмотрим радиальное движение, когда

$$v^\Theta = v^\Phi = 0 . \tag{11.123}$$

Учитывая (11.29), из уравнения (11.120) находим

$$\frac{dv^0}{ds} + \frac{1}{U}\,\frac{dU}{dW} v^0 v^1 = 0 , \tag{11.124}$$

где

$$v^1 = \frac{dW}{ds} . \tag{11.125}$$

Из уравнения (11.124) находим

$$\frac{d}{dW}\ln(v^0 U) = 0 . \tag{11.126}$$

Отсюда имеем

$$v^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{U_0}{U} , \tag{11.127}$$

где U_0 — постоянная интегрирования.

Учитывая (11.127), условие (11.122) для радиального движения принимает вид

$$\frac{U_0^2}{U} - 1 = \tilde{V}\left(\frac{dW}{ds}\right)^2 . \tag{11.128}$$

Если принять, что скорость падающего пробного тела на бесконечности была равна нулю, то получим $U_0 = 1$. Из (11.128) находим

$$\frac{dW}{ds} = -\sqrt{\frac{1-U}{U\tilde{V}}}\,. \tag{11.129}$$

Принимая во внимание (11.79), (11.96), (11.97) и (11.108), имеем

$$U = \frac{x_1^3}{2xf}, \quad \tilde{V} = \frac{2xf}{x_1^3(1-\epsilon f)^2}\,.$$

Подставляя эти выражения в (11.129), получим

$$\frac{dW}{ds} = -\sqrt{1-U}(1-\epsilon f)\,. \tag{11.130}$$

Используя (11.108), (11.112) и (11.113), в окрестности точки x_1 имеем

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{2}{x_1}\sqrt{\frac{x-x_1}{\epsilon x_1}}. \tag{11.131}$$

Переходя от переменной x к W, согласно (11.43) и учитывая (11.44), получим

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{\hbar c^2}{mGM}\sqrt{\frac{W}{GM}\left(1-\frac{2GM}{c^2W}\right)}\,. \tag{11.132}$$

Отсюда очевидно, что возникает точка поворота. Дифференцируя (11.132) по s, найдем

$$\frac{d^2W}{ds^2} = \frac{1}{2GM}\left(\frac{\hbar c^2}{mGM}\right)^2. \tag{11.133}$$

В точке поворота ускорение (11.133) весьма велико, и оно положительно, т.е. имеет место отталкивание. Интегрируя (11.132), получим

$$W = \frac{2GM}{c^2} + \left(\frac{\hbar c^2}{2mGM}\right)^2 \cdot \frac{1}{GM}(s-s_0)^2. \tag{11.134}$$

Формулы (11.132) – (11.134) совпадают с формулами работы [2]. Присутствие постоянной Планка в формуле (11.132) связано с волновой природой материи, в нашем случае гравитонов, имеющих массу покоя. Из (11.134) очевидно, что пробное тело никогда не может пересечь сферу Шварцшильда. В ОТО ситуация совершенно другая. Из решения Шварцшильда и выражения (11.129) следует, что пробное тело пересечет сферу Шварцшильда и образуется "черная дыра". Пробные тела или свет могут пересекать сферу Шварцшильда лишь во внутрь, при этом они уже никогда не могут выйти из сферы Шварцшильда. К тому же результату мы придем, если перейдем в синхронную систему свободно падающих пробных тел, с помощью преобразований

$$\tau = t + \int dW \left[\frac{\tilde{V}(1-U)}{U}\right]^{1/2}, \tag{11.135}$$

$$R = t + \int dW \left[\frac{\tilde{V}}{U(1-U)}\right]^{1/2}. \tag{11.136}$$

В этом случае интервал (11.118) принимает вид

$$ds^2 = d\tau^2 - (1-U)dR^2 - W^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2)\,. \tag{11.137}$$

В такой форме исчезают особенности метрических коэффициентов как для решения Шварцшильда, когда $\epsilon = 0$, так и для решения в нашем случае, когда $\epsilon \neq 0$. Однако, если в ОТО переменная W может обращаться в нуль, то в РТГ, в силу выражения (11.134), она всегда больше радиуса Шварцшильда.

Вычитая из выражения (11.136) выражение (11.135), получим

$$R - \tau = \int dW \sqrt{\frac{U\tilde{V}}{(1-U)}}\,. \tag{11.138}$$

Дифференцируя равенство (11.138) по τ, находим

$$\frac{dW}{d\tau} = -\sqrt{\frac{(1-U)}{U\tilde{V}}}\,. \tag{11.139}$$

Таким образом мы приходим к тому же исходному уравнению (11.129). Учитывая, что $r = W - \frac{GM}{c^2}$, на основании выражений (11.117) из уравнения (11.139) получим

$$W = \frac{2GM}{c^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\hbar c^2}{GMm}\right)^2 \frac{(R - c\tau)^2}{GM}. \qquad (11.134a)$$

Отсюда также очевидно, что, если $\epsilon \neq 0$, то падающее пробное тело никогда не может пересечь сферу Шварцшильда. В том случае, когда $\epsilon = 0$, шварцшильдовская особенность в метрике не сказывается на движении пробного тела в падающей синхронной системе. Вместо формулы (11.134а) в ОТО будет иметь место выражение

$$W = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^{1/3},$$

что свидетельствует о том, что пробное тело за конечный промежуток собственного времени достигает точки $W = 0$. При этом падающие частицы пересекают сферу Шварцшильда лишь в одном направлении во внутрь. Вычислим теперь время распространения светового сигнала от некоторой точки W_0 до точки $W_1 = \frac{2GM}{c^2}$ по часам удаленного наблюдателя. Для решения Шварцшильда из выражения $ds^2 = 0$ имеем

$$\frac{dW}{dt} = -c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 W}\right). \qquad (11.140)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$W_0 - W + \frac{2GM}{c^2}\ln\frac{W_0 - \frac{2GM}{c^2}}{W - \frac{2GM}{c^2}} = c(t - t_0). \qquad (11.141)$$

Отсюда очевидно, что в ОТО для достижения гравитационного радиуса $W_1 = \frac{2GM}{c^2}$ требуется бесконечное время по часам удаленного наблюдателя. В РТГ, как мы ранее установили, решение Шварцшильда имеет место до точки

$W = W_1(1+\lambda_2)$, а поэтому время достижения этой точки равно

$$c(t-t_0) = W_0 - W_1(1+\lambda_2) + \frac{2GM}{c^2}\ln\frac{W_0 - \frac{2GM}{c^2}}{\lambda_2\frac{2GM}{c^2}} \,. \quad (11.142)$$

Время распространения светового луча от точки $W = W_1(1+\lambda_2)$ до точки W_1 можно вычислить, используя формулы (11.97) и (11.108). В этом промежутке имеем

$$\frac{dW}{dt} = -c\frac{x_1^3}{2xf}(1-\epsilon f). \quad (11.143)$$

Отсюда после интегрирования и замены переменной получим

$$\frac{2MG}{c^2}\int\limits_{f}^{1/\epsilon}\frac{xdf}{f} = c(t_1 - t)\,. \quad (11.144)$$

Согласно (11.84) и (11.108) нижняя граница интегрирования равна

$$f = \tilde{C} = \frac{x_1^2}{2\lambda_2}\,. \quad (11.145)$$

Интеграл (11.144) легко вычисляется и с хорошей точностью приводит к следующему соотношению:

$$c(t_1 - t) = W_1\lambda_2 + \frac{2GM}{c^2}\ln\frac{2\lambda_2}{\epsilon}\,. \quad (11.146)$$

На основании (11.142) и (11.146) время, которое необходимо световому сигналу, чтобы пройти расстояние от точки W_0 до точки $W_1 = \frac{2GM}{c^2}$, равно сумме выражений (11.142) и (11.146)

$$c(t_1 - t_0) = W_0 - W_1 + \frac{2GM}{c^2}\ln\frac{W_0 - \frac{2GM}{c^2}}{\epsilon\frac{GM}{c^2}}\,. \quad (11.147)$$

Отсюда видно, что в РТГ, в отличие от ОТО, время распространения светового луча до сферы Шварцшильда конечно и по часам удаленного наблюдателя. Из формулы (11.147) очевидно, что время распространения сигнала не сильно увеличивается из-за действия гравитационного поля.

На основании изложенного следует, что при наличии массы гравитона $\epsilon \neq 0$ решение в РТГ существенно отличается от решения Шварцшильда из-за присутствия на сфере Шварцшильда сингулярности, которая не может быть устранена выбором системы координат. Таким образом, в рассмотренном нами случае, когда радиус тела меньше радиуса Шварцшильда или, точнее, когда $x_0 < x_1$, пробное тело в силу (11.134) никогда не может достигнуть поверхности тела. Из-за наличия особенности вне тела нарушается физическое условие $g < 0$, именно по этой причине физическое решение для статического сферически-симметричного тела возможно лишь в том случае, когда точка x_1 находится внутри тела. Этот вывод сохраняется и для синхронной системы координат, когда метрические коэффициенты (см.(11.134а)) являются функциями времени.

Таким образом, согласно РТГ, Шварцшильдовская сингулярность для тела любой массы отсутствует, поскольку радиус тела больше радиуса Шварцшильда, а поэтому невозможно образование "черных дыр" (объектов, не имеющих материальных границ и "отрезанных" от внешнего мира). Этот вывод согласуется с выводом Эйнштейна, который он сделал в 1939 году, следуя скорее своей научной интуиции, чем логике ОТО. Он писал: "*Шварцшильдовская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопление, достигнут скорости света*"[31]. Эйнштейн, конечно, видел, что наличие сингулярности Шварцшильда нарушает его основной принцип: "*признать все мыслимые* (мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности) *координатные системы принципиально равноправными для описания*

[31] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1966. Т.II, ст.119, с.531.

природы"[32]. Именно и поэтому с физической точки зрения он считал, что Шварцшильдовская сингулярность в метрических коэффициентах должна отсутствовать и в системе координат, связанной с удаленным наблюдателем. Однако все это реализуется не в ОТО, а в РТГ.

Согласно РТГ как полевой теории гравитации, тело любой массы не может неограниченно сжиматься, а поэтому гравитационный коллапс с образованием "черной дыры" невозможен. **Это означает, что коллапсирующая звезда не может уйти под свой гравитационный радиус.** Сферически-симметричная аккреция вещества на это тело, находящееся на заключительной стадии эволюции (когда ядерные ресурсы исчерпаны), будет сопровождаться большим энерговыделением из-за падения вещества на поверхность тела. Согласно РТГ гравитационный захват света невозможен. В ОТО при сферически-симметричной аккреции вещества на "черную дыру" энерговыделение достаточно мало, поскольку падающее вещество уносит энергию в "черную дыру". Осуществляется гравитационный захват света. Происходит гравитационное самозамыкание объекта. Данные наблюдений за такими объектами могли бы дать ответ, что происходит со звездами большой массы на заключительной стадии эволюции, когда все ядерные ресурсы исчерпаны.

---

[32] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.38, с.459.

Дополнение

В сферических координатах пространства Минковского интервалы пространства Минковского и эффективного риманова пространства имеют вид

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) \ , \tag{1}$$

$$ds^2 = U(r)dt^2 - V(r)dr^2 - W^2(r)(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) \ . \tag{2}$$

Введем вектор скорости

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \ \ v^i = ve^i \ (x^i = r, \Theta, \Phi), \tag{3}$$

e^i — единичный вектор относительно метрики пространственной части пространства Минковского

$$\kappa_{ik}e^ie^k = 1 \ . \tag{4}$$

В общем случае κ_{ik} имеет вид

$$\kappa_{ik} = -\gamma_{ik} + \frac{\gamma_{0i}\gamma_{0k}}{\gamma_{00}} \ . \tag{5}$$

В случае (1)

$$\kappa_{ik} = -\gamma_{ik}. \tag{6}$$

Условие (4) для метрики (1) имеет вид

$$(e^1)^2 + r^2[(e^2)^2 + \sin^2\Theta \cdot (e^3)^2] = 1 \ . \tag{7}$$

Определим четырехвектор скорости равенством

$$v^\mu = (1, ve^i) \tag{8}$$

и потребуем, чтобы он был изотропным в пространстве Минковского

$$\gamma_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0 \ . \tag{9}$$

Подставляя (8) в (9) и учитывая (7), находим

$$v = 1 \, . \tag{10}$$

Отсюда изотропный четырехвектор v^μ равен

$$v^\mu = (1, e^i) \, . \tag{11}$$

Так как, согласно специальной теории относительности, движение всегда происходит внутри или на границе конуса причинности Минковского, то для гравитационного поля имеет место принцип причинности

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \leq 0 \, , \tag{12}$$

т.е.

$$U - V(e^1)^2 - W^2[(e^2)^2 + (e^3)^2 \sin^2 \Theta] \leq 0 \, . \tag{13}$$

Учитывая (7), выражение (13) можно записать в виде

$$U - \frac{W^2}{r^2} - \left(V - \frac{W^2}{r^2}\right)(e^1)^2 \leq 0 \, . \tag{14}$$

Пусть

$$V - \frac{W^2}{r^2} \geq 0 \, . \tag{15}$$

В силу произвольности $0 \leq (e^1)^2 \leq 1$ неравенство (14) будет выполняться, только если

$$U - \frac{W^2}{r^2} \leq 0 \, . \tag{16}$$

Из неравенств (15) и (16) следует

$$U \leq V \, . \tag{17}$$

В том случае, если

$$V - \frac{W^2}{r^2} < 0 \, , \tag{18}$$

запишем неравенство (14) в форме

$$U - V - \left(\frac{W^2}{r^2} - V\right)(1 - (e^1)^2) \leq 0\ . \tag{19}$$

В силу произвольности e^1, выражение (19) будет выполняться для любых значений $0 \leq (e^1)^2 \leq 1$, только в случае, если

$$U \leq V\ . \tag{20}$$

Таким образом, принцип причинности РТГ приводит во всех случаях к неравенству

$$U(r) \leq V(r)\ . \tag{21}$$

12. Гравитационные эффекты в Солнечной системе

Прежде чем приступить к изучению эффектов, остановимся на некоторых общих положениях РТГ и ОТО, которые непосредственно проявляются при расчете гравитационных эффектов. Уравнения РТГ (5.19) и (5.20) общековариантны при произвольных преобразованиях координат и форминвариантны относительно преобразований Лоренца. Иначе говоря, в РТГ имеет место та же ситуация, как и в электродинамике. Если в двух инерциальных системах в галилеевых координатах мы имеем соответственно одинаковое распределение вещества $T_{\mu\nu}[x, g_{\alpha\beta}(x)]$ и $T_{\mu\nu}[x', g_{\alpha\beta}(x')]$, то в силу форминвариантности уравнений относительно преобразований Лоренца мы получим одинаковые уравнения, которые при тождественных условиях задачи и обеспечивают выполнимость принципа относительности. С другой стороны, если в некоторой инерциальной системе координат при распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$ мы имеем решение $g_{\mu\nu}(x)$, то при преобразованиях Лоренца в другую инерциальную систему получим метрику $g'_{\mu\nu}(x')$, но она соответствует распределению вещества $T'_{\mu\nu}(x')$. В силу форминвариантности уравнений при лоренцевских преобразованиях мы можем вернуться к исходным переменным x и получим новое решение $g'_{\mu\nu}(x)$, соответствующее распределению вещества $T'_{\mu\nu}(x)$. То есть имеет место однозначное соответствие между распределением вещества и метрикой. Изменяется распределение вещества, соответственно изменяется и метрика. Существенным моментом в РТГ является наличие в уравнениях метрики пространства Минковского. Именно это обстоятельство позволяет осуществить сравнение движения вещества в гравитационном поле с движением вещества при отсутствии гравитационного поля.

В ОТО ситуация совершенно иная. Уравнения ОТО вне вещества форминвариантны относительно произвольных координатных преобразований, а поэтому если при распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$ мы имеем решение $g_{\mu\nu}(x)$, то совершая координатные преобразования, которые в области вещества совпадают с исходными, а вне вещества отличаются от них, наше решение будет в новых переменных иметь вид $g'_{\mu\nu}(x')$. В силу форминвариантности уравнений вне вещества мы можем возвратиться к исходным переменным x, а, следовательно, получим новое решение $g'_{\mu\nu}(x)$ при том же распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$. Этим двум метрикам (а их можно построить сколько угодно) соответствуют различные интервалы

$$ds_1^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

$$ds_2^2 = g'_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu.$$

Какой же интервал необходимо выбрать? Ведь геодезические линии этих интервалов различные. В этой связи в ОТО гравитационное поле стремятся отождествить с классом эквивалентных диффеоморфных метрик $g_{\mu\nu}(x), g'_{\mu\nu}(x), ...,$ получаемых с помощью преобразований координат. С точки зрения математики это очевидно, а как быть с физической интерпретацией?

Следовательно, между выводами из РТГ и ОТО имеется принципиальное различие и суть его в том, что уравнения РТГ не форминвариантны относительно произвольных координатных преобразований, тогда как уравнения ОТО вне вещества форминвариантны относительно этих преобразований. Уравнения РТГ форминвариантны только относительно преобразований координат, оставляющих метрику Минковского $\gamma_{\mu\nu}(x)$ форминвариантной. Отсюда, в частности, следует форминвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца.

Вопрос о множественности решений $g_{\mu\nu}(x), g'_{\mu\nu}(x), ...,$ серьезно беспокоил Эйнштейна, и в четырех статьях [29] (1913 – 1914 гг.) он подробно обсуждал его и приходил к выводу об ограниченном выборе координатных систем, поскольку считал, что из общей ковариантности при одном и том же распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$ возникает множество метрик, что физически недопустимо. Однако основная причина неоднозначности не связана с общей ковариантностью, она связана с форминвариантностью уравнений ОТО вне вещества относительно произвольных преобразований координат. Чтобы устранить эту неоднозначность, не требуется отказываться от общей ковариантности, поскольку дело не в ней, а необходимо ограничить форминвариантность уравнений в соответствии с принципом относительности. Именно это и осуществлено в РТГ на основе полевого подхода. Можно привести простой пример из электродинамики. Пусть при токе $j_\mu(x)$ мы имеем решение $A_\mu(x)$. Совершая преобразования к новым переменным x', совпадающим с исходными переменными x в области распределения тока $j_\mu(x)$ и отличающихся от них в области вне тока, наше решение принимает вид $A'_\mu(x')$. Но совершенно очевидно, что $A'_\mu(x)$ не будет решением уравнений электродинамики в координатах x, поскольку уравнения электродинамики не форминвариантны относительно произвольных преобразований координат.

Это означает, что в электродинамике при одном и том же распределении тока $j_\mu(x)$ при одинаковых условиях существует только одно распределение электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$. Если в ОТО в двух произвольных системах координат имеется одинаковое распределение вещества, определяемое тензорами $T_{\mu\nu}(x)$ и $T_{\mu\nu}(x')$, то в силу форминвариантности уравнений ОТО вне вещества, при одинаковых условиях, мы можем, в частности, иметь одинаковые метрические коэффициенты $g_{\mu\nu}(x)$ и $g_{\mu\nu}(x')$. Именно это обстоятельство и позволило Эйнштейну выдвинуть общий принцип относительности для всех физических процессов. Однако требование одинаковости метрических коэффициентов приводит к сильному ограничению на структуру риманова пространства, оно оказывается пространством постоянной кривизны.

Поскольку риманово пространство в ОТО в общем случае не является таковым, то общий принцип относительности, как физический принцип, не реализуется в природе. Это следует и из того, что уравнения электродинамики, например, не форминвариантны относительно **произвольных** преобразований координат. Принцип относительности, как физический принцип, связан не с общей ковариантностью, а с форминвариантностью уравнений и **метрики** относительно преобразований координат. В.А. Фок был прав, когда писал: *"общий принцип относительности, как физический принцип, который имел бы место по отношению к произвольным системам отсчета, невозможен"* [25]. В ОТО при одном и том же распределении вещества $T_{\mu\nu}(x)$ существует множество решений уравнений ОТО для метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}(x), g'_{\mu\nu}(x), \ldots$ Геодезические линии вне вещества для этих решений будут различными.

В 1921–1922 годах вопрос о множественности метрик в ОТО в одной координации широко обсуждался П.Пенлеве, М.Шази, Ж.Беккерелем, А.Гюлльстрандом, Е.Кречманом. Суть полемики сводилась к вопросу: с какой радиальной переменной в уравнениях ОТО необходимо отождествлять астрономически определенное расстояние от Солнца до планеты? Следует отметить, что этот произвол в первом порядке по гравитационной постоянной не сказывается на гравитационных эффектах: отклонение луча света, смещение перигелия Меркурия, прецессия гироскопа. Однако в эффекте запаздывания радиосигнала он сказывается уже в первом порядке по G.

Так, в зависимости от выбора решений в форме Шварцшильда или в гармонических координатах мы будем получать различные значения для времени запаздывания. Мы далее увидим, что в РТГ такого произвола нет и эффекты определяются однозначно.

Причиной множественности метрик является не общая ковариантность, а форминвариантность уравнений относительно произвольных координатных преобразований. В РТГ этой неоднозначности нет, так как метрика $g_{\mu\nu}(x)$ однозначно определяется распределением вещества $T_{\mu\nu}(x)$. В разделе 11 было показано, что поскольку радиус статического сферически-симметричного тела превышает радиус Шварцшильда, то внешнее решение уравнений РТГ в инерциальной системе в сферических координатах в области (11.53) имеет вид

$$ds^2 = \frac{r - MG}{r + MG}(dx^0)^2 - \frac{r + MG}{r - MG}(dr^2) -$$

$$-(r + MG)^2[(d\theta)^2 + \sin^2\Theta(d\varphi)^2]. \qquad (\alpha)$$

Именно такое решение в постньютоновском приближении и дает выражения для метрических коэффициентов эффективного риманова пространства, совпадающие с ранее полученными выражениями (8.59а), которые используются для объяснения гравитационных эффектов в Солнечной системе.

Существенным моментом является то обстоятельство, что при выключении гравитационного поля (например, удаление тела) мы с необходимостью оказываемся в пространстве Минковского в инерциальной системе с метрикой

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\Theta(d\varphi)^2].$$

При вычислении гравитационных эффектов в Солнечной системе нам необходимо вычислить траекторию движения в эффективном римановом пространстве, определяемом интервалом ds, и сравнить с соответствующей траекторией, определяемой из интервала $d\sigma$. Метрика пространства Минковского присутствует в уравнениях РТГ. Именно таким путем определяется угол отклонения светового луча и время запаздывания радиосигнала из-за действия гравитационного поля Солнца. Что касается вычисления смещения перигелия планет, то здесь приходится сравнивать траекторию движения пробного тела вокруг Солнца, вычисленную в РТГ, с траекторией, полученной на основе ньютоновой теории гравитации. Именно в этих расчетах также имеет место различие выводов РТГ и ОТО, поскольку в ОТО нельзя сказать в какой системе координат (инерциальной или неинерциальной) пространства Минковского мы оказались при выключении гравитационного поля. Для вычисления гравитационного эффекта необходимо сравнить в одной координации движение по геодезической линии в римановом пространстве с геодезической линией в пространстве Минковского при выключении гравитации. Но для этого необходимо точно знать как метрику $g_{\mu\nu}(x)$, так и метрику $\gamma_{\mu\nu}(x)$.

Однако в ОТО из-за множественности решений как для $g_{\mu\nu}(x)$, так и для $\gamma_{\mu\nu}(x)$ мы не можем определенно сказать какую риманову метрику $g_{\mu\nu}(x)$ необходимо взять для выбранной метрики $\gamma_{\mu\nu}(x)$, чтобы найти геодезические линии в римановом пространстве и в пространстве Минковского. В этом и состоит суть неоднозначности предсказаний гравитационных эффектов в ОТО. В ОТО иногда ошибки избегают, беря за исходную инерциальную систему в декартовых координатах (а ведь таких координат в ОТО нет) и рассматривая на этом фоне слабое гравитационное поле. В РТГ такой трудности нет, поскольку для выбранной метрики $\gamma_{\mu\nu}(x)$ с помощью уравнений (5.19), (5.20) при соответствующих условиях однозначно определяется метрика $g_{\mu\nu}(x)$ эффективного риманова пространства, что и позволяет однозначно определить гравитационный эффект.

При расчетах эффектов в гравитационном поле Солнца в качестве идеализированной модели Солнца обычно берут статическое сферически-симметричное тело с радиусом $R_\odot$. Общий вид метрики эффективного риманова пространства в инерциальной системе в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = U(r)(dx^0)^2 - V(r)(dr)^2 - \\ -W^2(r)[(d\theta)^2 + \sin^2\Theta(d\varphi)^2]. \qquad (12.1)$$

В отсутствии гравитационного поля метрика имеет форму

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2[(d\theta)^2 + \sin^2\Theta(d\varphi)^2]. \qquad (12.1a)$$

Подставляя (12.1) и (12.1a) в уравнения (5.19) и (5.20), мы и получаем внешнее решение для Солнца (α).

В разделе 5 было показано, что из уравнений РТГ (5.19) и (5.20) непосредственно следуют уравнения движения для вещества

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \qquad (12.2)$$

Отсюда легко получить уравнения движения пробного тела в статическом гравитационном поле. Тензор энергии-импульса для вещества $T^{\mu\nu}$ в этом случае имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu, \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \qquad (12.3)$$

Подставляя (12.3) в (12.2), получим

$$U^\mu \nabla_\nu(\rho U^\nu) + \rho U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0. \qquad (12.4)$$

Умножая это уравнение на U_μ и учитывая $U_\mu U^\mu = 1$, получим

$$\nabla_\nu(\rho U^\nu) + \rho U^\nu U_\mu \nabla_\nu U^\mu = 0. \qquad (12.4a)$$

Так как

$$\nabla_\nu(U_\mu U^\mu) = 2U_\mu \nabla_\nu U^\mu = 0,$$

из уравнения (12.4a) имеем

$$\nabla_\nu(\rho U^\nu) = 0. \qquad (12.5)$$

Подставляя (12.5) в (12.4), находим

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0. \qquad (12.6)$$

Используя определение ковариантной производной, уравнения (12.6) можно записать в форме

$$\left[\frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} U^\sigma\right] \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \tag{12.7}$$

Учитывая определение полного дифференциала, имеем

$$dU^\mu = \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu. \tag{12.8}$$

На основании (12.8) уравнение (12.7) принимает вид

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} U^\nu U^\sigma = 0, \quad U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{12.9}$$

Уравнение движения пробного тела (12.9) является уравнением геодезических линий в пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}$. Символы Кристоффеля определяются формулой

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\sigma\lambda} + \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\sigma}). \tag{12.10}$$

На основе (12.1) и (12.10) легко получить необходимые нам символы Кристоффеля:

$$\begin{gathered}
\Gamma^2_{12} = \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta, \\
\Gamma^3_{13} = \frac{1}{W}\frac{dW}{dr}, \quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\Theta, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{1}{2U}\frac{dU}{dr}.
\end{gathered} \tag{12.11}$$

Из четырех уравнений (12.9) независимых только три, поскольку имеет место соотношение

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1. \tag{12.12}$$

Это обстоятельство мы далее будем использовать, выбирая три наиболее простые уравнения из (12.9). Из уравнений

(12.9) возьмем уравнения

$$\frac{d^2x^0}{ds^2}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dr}\frac{dx^0}{ds}\frac{dr}{ds}=0, \tag{12.13}$$

$$\frac{d^2\Theta}{ds^2}+\frac{2}{W}\frac{dW}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d\Theta}{ds}-\sin\Theta\cos\Theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0, \tag{12.14}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{W}\frac{dW}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\operatorname{ctg}\Theta\frac{d\Theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0, \tag{12.15}$$

и дополним их уравнением (12.12) в форме

$$U\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2-V\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-W^2\left(\frac{d\Theta}{ds}\right)^2-$$
$$-W^2\sin^2\Theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=1. \tag{12.16}$$

Так как гравитационное поле сферически-симметричное, то естественно выбрать систему координат таким образом, чтобы движение происходило в экваториальной плоскости, т.е.

$$\Theta=\frac{\pi}{2}. \tag{12.17}$$

При нашем выборе уравнение (12.14) тождественно удовлетворяется.

Уравнения (12.13) и (12.15) соответственно можно записать в форме

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\frac{dx^0}{ds}U\right]=0, \tag{12.18}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\ln\frac{d\varphi}{ds}W^2\right]=0. \tag{12.19}$$

Отсюда находим первые интегралы движения E, J:

$$\frac{dx^0}{ds}U=\frac{1}{\sqrt{E}},\quad \frac{d\varphi}{ds}W^2=\frac{J}{\sqrt{E}}. \tag{12.20}$$

Подставляя эти выражения в (12.16), получим

$$\frac{1}{EU} - V\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{J^2}{W^2E} = 1. \tag{12.21}$$

Из второго соотношения (12.20) находим

$$ds = d\varphi\frac{\sqrt{E}W^2}{J}. \tag{12.22}$$

Переходя в (12.21) с помощью (12.22) к переменной φ, получим

$$\frac{V}{W^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{W^2} - \frac{1}{J^2U} + \frac{E}{J^2} = 0. \tag{12.23}$$

Из первого соотношения (12.20) находим

$$(ds)^2 = EU^2(dx^0)^2. \tag{12.24}$$

Отсюда следует, что $E > 0$ для пробных тел и $E = 0$ для света.

В ОТО гравитационные эффекты в Солнечной системе вычислялись различными методами. Мы здесь следуем методике вычисления С.Вейнберга [1].

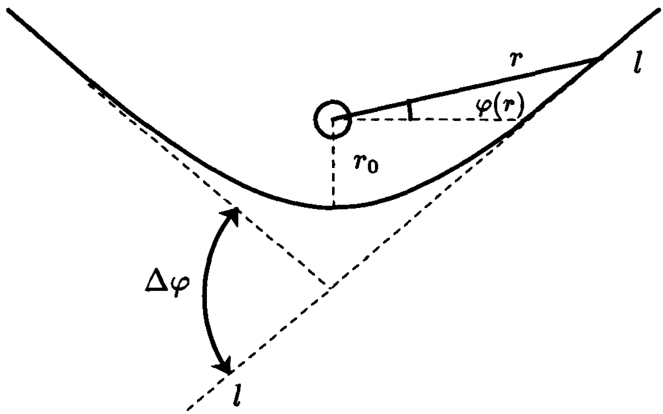
12.1. Отклонение световых лучей Солнцем

Пусть фотон из удаленной области пролетает мимо Солнца. Какова траектория светового луча? Она определяется из уравнения (12.23) при $E = 0$ и имеет вид

$$d\varphi = dr\sqrt{\frac{UV}{W^2\left(\frac{W^2}{J^2} - U\right)}}. \tag{12.25}$$

В точке траектории светового луча (см. рисунок), наиболее близкой к Солнцу,

$$\left.\frac{dr}{d\varphi}\right|_{r_0} = 0. \tag{12.26}$$



Отклонение луча света

Интеграл движения J выражается через метрические параметры U_0 и W_0

$$J^2 = \frac{W^2(r_0)}{U(r_0)} = \frac{W_0^2}{U_0}. \tag{12.27}$$

Интегрируя (12.25), получим

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) + \int_r^\infty dr \left[\frac{V}{W^2\left(\frac{W^2}{W_0^2}\frac{U_0}{U} - 1\right)} \right]^{1/2}. \tag{12.28}$$

Угол отклонения светового луча равен

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi(\infty)| - \pi. \tag{12.29}$$

Здесь мы учли, что при отсутствии гравитационного поля луч света движется по прямой линии l, а именно поэтому в (12.29) появилось π. Для тела, имеющего массу Солнца, из уравнений РТГ имеем

$$U(r) = \frac{r - GM}{r + GM}, \ \ V = \frac{r + GM}{r - GM}, \ \ W^2 = (r + GM)^2. \tag{12.30}$$

Для вычислений иногда удобно использовать независимую переменную W:

$$U(W) = 1 - \frac{2GM}{W}, \quad V(W) = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{W}}. \tag{12.31}$$

В первом приближении по гравитационной постоянной G метрические коэффициенты соответственно равны

$$\begin{gathered} U(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad V(r) = 1 + \frac{2GM}{r}, \\ W^2 = r^2 \left(1 + \frac{2GM}{r}\right). \end{gathered} \tag{12.32}$$

Подставляя эти выражения в интеграл (12.28), получим для него следующее выражение:

$$I = r_0 \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r\left[r^2\left(1 - \frac{4MG}{r_0}\right) + 4MGr - r_0^2\right]^{1/2}}. \tag{12.33}$$

Проводя замену переменных $r = \frac{1}{t}$, имеем

$$I = \int\limits_{0}^{1/r_0} \frac{dt}{\sqrt{r_0^{-2}\left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right)^2 - \left(t - \frac{2MG}{r_0^2}\right)^2}}. \tag{12.34}$$

Используя табличный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{m} + c,$$

находим

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{2MG}{r_0}. \tag{12.35}$$

На основании (12.29) получим

$$\Delta\varphi = \frac{4M_{\odot}G}{c^2 r_0}, \tag{12.36}$$

принимая во внимание

$$\frac{M_{\odot}G}{c^2} = 1,475 \cdot 10^5 \text{см}, \quad R_{\odot} = 6,95 \cdot 10^{10} \text{см}, \tag{12.37}$$

находим

$$\Delta\varphi = \frac{R_{\odot}}{r_0} \sum_{\odot}, \ \sum_{\odot} = \frac{4M_{\odot}G}{R_{\odot}c^2} = 1,75''. \tag{12.38}$$

Итак, отклонение луча света гравитационным полем Солнца равно

$$\Delta\varphi = 1,75'' \cdot \frac{R_{\odot}}{r_0}. \tag{12.39}$$

При вычислении угла отклонения светового луча мы учли, что в отсутствии поля в инерциальной системе, в силу метрики (12.1а) луч света двигается по прямой линии l. Именно отклонение от этой прямой и есть гравитационный эффект.

12.2. Запаздывание радиосигнала

И.И. Шапиро [43] предложил и осуществил эксперимент по измерению времени, которое необходимо, чтобы радиосигнал достиг планеты Меркурий и, отразившись, вернулся на Землю. Вычислим это время, исходя из уравнений РТГ.

Мы перейдем от независимой переменной φ к независимой переменной x^0. Для этой цели, используя (12.22) и (12.24), получим

$$(d\varphi)^2 = \frac{J^2U^2}{W^4}(dx^0)^2. \tag{12.40}$$

Уравнение (12.23) с помощью (12.40) принимает вид

$$ct(r, r_0) = \int\limits_{r_0}^{r} dr \left[\frac{V}{\left(1 - \frac{W_0^2}{W^2} \cdot \frac{U}{U_0}\right) U}\right]^{1/2}. \tag{12.41}$$

Подставляя в интеграл (12.41) выражения (12.32), находим

$$ct(r,r_0) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left[1 + \frac{2MG}{r} + \frac{2MG}{r}\frac{r_0}{r+r_0}\right]. \quad (12.42)$$

Используя табличные интегралы

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \ln\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0},$$

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}}\frac{r_0}{r+r_0} = \left[\frac{r-r_0}{r+r_0}\right]^{1/2}, \quad (12.43)$$

получим

$$ct(r,r_0) = \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2MG\ln\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} +$$
$$+2MG\left[\frac{r-r_0}{r+r_0}\right]^{1/2}. \quad (12.44)$$

Пусть r_e, r_p — гелиоцентрические координаты Земли и Меркурия. Поскольку $r_e, r_p \gg r_0$, то в слагаемых выражения (12.44), содержащих гравитационную постоянную, под корнем можно пренебречь влиянием r_0, тогда

$$ct(r_p, r_e) = \sqrt{r_e^2 - r_0^2} + \sqrt{r_p^2 - r_0^2} +$$
$$+\frac{2MG}{c^2}\ln\frac{4r_e r_p}{r_0^2} + \frac{4MG}{c^2}. \quad (12.45)$$

На прямую, соединяющую точки r_e и r_p, опустим из центра источника гравитационного поля перпендикуляр $r_\perp$. Тогда, согласно теореме Пифагора, имеем

$$r_e^2 = R_e^2 + r_\perp^2, \;\; r_p^2 = R_p^2 + r_\perp^2. \quad (12.46)$$

В первом порядке по G

$$r_0 \simeq r_\perp + R_e\frac{\Delta\varphi}{2}, \;\; r_0^2 - r_\perp^2 \simeq R_e r_0 \Delta\varphi, \quad (12.47)$$

$\Delta\varphi$ — угол отклонения луча света из-за влияния источника гравитационного поля (см. (12.36)).

$$\sqrt{r_e^2 - r_0^2} = R_e\sqrt{1 - \frac{r_0}{R_e}\Delta\varphi} \simeq$$
$$\simeq R_e - r_0\frac{\Delta\varphi}{2} = R_e - \frac{2MG}{c^2}, \tag{12.48}$$

аналогично

$$\sqrt{r_p^2 - r_0^2} \simeq R_p - r_0\frac{\Delta\varphi}{2} = R_p - \frac{2MG}{c^2}. \tag{12.49}$$

С учетом (12.48) и (12.49) выражение (12.45) принимает вид

$$ct(r_p, r_e) - R = \frac{2MG}{c^2}\ln\frac{4r_er_p}{r_0^2}, \tag{12.50}$$

здесь $R = R_e + R_p$ — расстояние между планетами.

Время запаздывания радиосигнала при его распространении от Земли до Меркурия и обратно равно

$$\begin{gathered}\Delta\tau = 2[t(r_p, r_e) - R/c] = \frac{4MG}{c^3}\ln\frac{4r_er_p}{r_0},\\ r_e = r_\oplus = 15\cdot 10^{12}\text{см},\ \ r_p = r_☿ = 5,8\cdot 10^{12}\text{см},\end{gathered} \tag{12.51}$$

в качестве r_0 можно взять радиус Солнца $R_\odot$

$$R_\odot = 6,95\cdot 10^{10}\text{см}.$$

Подставляя эти значения в (12.51) и учитывая, что

$$\frac{4M_\odot G}{c^2} = 5,9\cdot 10^5\text{см},$$

получим

$$\Delta\tau = \frac{4M_\odot G}{c^3}\ln\frac{4r_\oplus r_☿}{R_\odot^2} = 219,9\ \text{мкс}. \tag{12.52}$$

При вычислении эффекта запаздывания радиосигнала мы учли то обстоятельство, что в отсутствии гравитационного поля в силу (12.1а) луч света от точки e до точки p движется в инерциальной системе координат по прямой линии. Из сравнения с этим движением и определяется гравитационный эффект. Именно поэтому в (12.51) слева и возникло слагаемое $\frac{2R}{c}$. В наблюдениях время $\frac{2R}{c}$ определяется в период, когда Солнце удаляется от траектории светового луча, так что его влияние существенно уменьшается.

В ОТО, если искать решение уравнений Гильберта–Эйнштейна для статического сферически-симметричного тела, имеющего массу M, то в одной и той же координации можно получить внешнее решение для метрики, которое содержит две произвольные функции

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdr +$$

$$+g_{11}dr^2 + g_{22}(d\Theta)^2 + g_{33}(d\varphi)^2, \qquad (12.31а)$$

где

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{W(r)}, \quad g_{01} = -B(r),$$

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{W}\right)^{-1} \left[\left(\frac{dW}{dr}\right)^2 - B^2\right],$$

$$g_{22} = -W^2(r), \quad g_{33} = -W^2 \sin\Theta.$$

Таким образом, в одной и той же координации для тела массы M существует неограниченное число решений. Здесь функции $B(r)$ и $W(r)$, вообще говоря, произвольны, ОТО их не определяет. Обо всем этом П.Пенлеве писал около 80 лет назад и подчеркивал, что выбор исходных формул чисто произволен. Отсюда очевидно, что в ОТО из точного внешнего решения уравнений однозначно не следует ни закон Ньютона, ни постньютоновское приближение (8.59а), которое используют в ОТО для объяснения гравитационных эффектов в Солнечной системе. Отсюда также, в частности, следует, что бесконечно малый промежуток истинного физического времени в ОТО

$$d\tau = \left[dt\sqrt{1 - \frac{2GM}{W(r)}} - \frac{B(r)dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{W(r)}}}\right]$$

будет различным в зависимости от выбора произвольных функций $W(r)$ и $B(r)$. Это означает, что для статического центрально-симметричного тела массы M ход физического времени для того или иного процесса не определяется однозначно.

Как мы видим, ситуация в ОТО совершенно отличается от положения в электродинамике, где закон Кулона однозначно следует из уравнений теории. Поясним ситуацию на примере пространства Минковского. С точки зрения геометрии, пространство Минковского в инерциальной системе и в неинерциальной, по существу, остается тем же самым, поскольку тензор кривизны Римана равен нулю. В силу форминвариантности тензора Римана мы будем иметь в одной и той же координации неограниченное число метрик $\gamma_{\mu\nu}(x)$, $\gamma'_{\mu\nu}(x), \ldots$ и т.д., обращающих тензор Римана в нуль. Но в зависимости от выбора метрики мы будем иметь различные геодезические линии в одной и той же координации, что приведет к различным физическим результатам. Все это очевидно и хорошо известно, поскольку динамика в инерциальной системе отличается от динамики в неинерциальной системе из-за появления сил инерции. Именно поэтому выбор неинерциальной системы координат в четырехмерном пространстве Минковского изменяет физику. В пространстве Минковского, однако, имеются инерциальные системы, а данные астрономических наблюдений как раз и отнесены к инерциальной системе. Этим обстоятельством и диктуется выбор координатной системы в физических уравнениях. В римановой геометрии ОТО таких систем нет, а поэтому совершенно неясно, какие координаты необходимо выбрать, чтобы сравнить теоретические расчеты с данными наблюдений. От выбора системы координат (или, другими словами, в нашем частном случае от выбора функций $B(r)$ и $W(r)$) геометрия не зависит, она как была римановой, так и останется таковой, однако физика изменяется. Конечно, для нашего случая можно подобрать произвольные функции $B(r)$ и $W(r)$ таким образом, чтобы выполнялся закон тяготения Ньютона, а постньютоновское приближение имело вид (8.59а). Однако, к сожалению, такой выбор в ОТО произволен, поскольку он не продиктован какими-либо физическими условиями. На риманову метрику, если она не полевого происхождения, невозможно сформулировать физические требования на ее поведение, поскольку последнее зависит даже от выбора трехмерных пространственных координат. Для островных систем вопрос о выборе координат Фок решил с помощью гармонических условий. Но почему именно их необходимо выбрать, а не какие-либо другие, оставалось неясным.

Вернемся теперь к анализу конкретного примера, демонстрирующего неоднозначность ОТО при вычислении гравитационного эффекта запаздывания радиосигнала при его распространении от Земли до Меркурия и в обратном направлении. Предсказания теории зависят от выбора решения. Воспользуемся простейшим частным случаем

$$B(r) = 0, \quad W(r) = r + (\lambda + 1)M, \quad r > R_0,$$

λ — произвольный параметр; R_0 — радиус тела. При соответствующем подборе функции $W(r)$ в окрестности тела это решение можно сшить с решением внутри тела. Если повторить предыдущие вычисления, то для этой метрики найдем

$$ct(r, r_0) = \sqrt{r^2 - r_0^2} + 2MG \ln \frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} +$$

$$+2MG\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\left[\frac{r - r_0}{r + r_0}\right]^{1/2}. \qquad \text{(A)}$$

Сравнивая это выражение с (12.44), мы видим, что уже в первом порядке по G появляется неоднозначность в ОТО при описании эффекта запаздывания радиосигнала из-за влияния источника гравитационного поля. На основании (А) время запаздывания радиосигнала при его распространении от Земли до Меркурия и обратно равно, согласно ОТО, следующей величине:

$$\Delta\tau = 2\left[t(r_e, r_p) - \frac{R}{c}\right] = \frac{4MG}{c^3}\ln\frac{4r_e r_p}{r_0^2} + \frac{2MG}{c^3}\lambda. \qquad \text{(B)}$$

Заметим, что в первом порядке по G физическое расстояние l, определяемое выражением

$$l = \int\limits_{R_0}^{r}\sqrt{g_{11}}dr \simeq r - R_0 + \frac{MG}{c^2}\ln\frac{r}{R_0},$$

не зависит от параметра λ, именно поэтому первый член в (B) также не будет зависеть от λ, а следовательно, из-за наличия второго члена мы будем иметь различные предсказания для времени запаздывания радиосигнала в зависимости от выбора постоянной λ. Выражение (B) существенно отличается от результата (12.51), который точно следует из РТГ и согласуется с данными эксперимента [43]. Для решения Шварцшильда $\lambda = -1$ отличие от (12.51) будет на величину $\frac{2MG}{c^3}$, что составляет для Солнца около 10 мкс. При вычислении гравитационных эффектов: отклонения луча света Солнцем, смещения перигелия планет, прецессии гироскопа, смещения спектральных линий, неоднозначность также возникает, но во втором порядке по гравитационной постоянной G. Все это детально обсуждалось с проф. Ю.М. Лоскутовым (см. также монографию [10]).

Таким образом, ОТО в принципе не способна давать определенных предсказаний о гравитационных эффектах, в чем состоит еще один ее принципиальный недостаток. Некоторые попытки связать гравитационное поле в ОТО с классом эквивалентности диффеоморфных метрик не ликвидируют этой неоднозначности, поскольку они не устраняют принципиального недостатка ОТО — форминвариантности уравнений Гильберта–Эйнштейна вне вещества относительно произвольных координатных преобразований [33]. Именно это обстоятельство приводит к тому, что весь набор диффеоморфных метрик возникает в одной координации для одного и того же распределения вещества, а это, согласно теореме Вейля–Лоренца–Петрова (см. в конце раздела 14), приводит к различным геодезическим линиям при одних и тех же условиях задачи, что физически недопустимо. **Суть вопроса состоит не в общей ковариантности, которая всегда должна быть, а допустима ли форминвариантность физических уравнений относительно произвольных координатных преобразований?**

Поскольку при наличии сил инерции координатные системы физически неэквивалентны, то ни о какой форминвариантности физических уравнений относительно произвольных координатных преобразований не может быть и речи. Общая ковариантность — это математическое требование, тогда как форминвариантность имеет глубокое физическое содержание. Именно во всех физических теориях форминвариантность уравнений и **метрики** имеет место относительно преобразований Лоренца — в этом состоит суть принципа относительности.

Неэквивалентность различных координатных систем особенно очевидна, если рассмотреть псевдоевклидову геометрию, для которой тензор кривизны равен нулю. Из условия равенства тензора кривизны нулю в силу форминвариантности можно получить множество решений для метрического тензора в одной и той же координации. Но совершенно очевидно, что они физически неэквивалентны, поскольку одни из них относятся к инерциальным системам

---

[33] См., например: *Д. Стэчел.* // Тр. конф. “Jena-1980”, 1981 (DDR).

координат, другие к неинерциальным. Все это с большим усложнением имеет место и в случае римановой геометрии.

Важно еще раз подчеркнуть, что в ОТО в силу форминвариантности уравнений, вне распределения вещества, относительно произвольных преобразований координат возникает ситуация, когда при одном и том же распределении вещества существует в одной и той же координации неограниченное число метрик. Такой ситуации нет ни в одной другой физической теории, поскольку в них допускается форминвариантность уравнений только относительно преобразований координат, оставляющих метрику $\gamma_{\mu\nu}(x)$ форминвариантной. Отсюда, в частности, следует форминвариантность уравнений относительно преобразований Лоренца.

12.3. Смещение перигелия планет

Рассмотрим движение пробного тела на околосолнечной орбите. В перигелии гелиоцентрическое расстояние пробного тела минимально и равно r_-, а в афелии максимально и равно r_+. Поскольку в перигелии и афелии $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, из уравнения (12.23) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{W(r_+)} - \frac{1}{J^2 U(r_+)} &= -\frac{E}{J^2}, \\ \frac{1}{W(r_-)} - \frac{1}{J^2 U(r_-)} &= -\frac{E}{J^2}. \end{aligned} \qquad (12.53)$$

Отсюда находим

$$J^2 = \frac{\frac{1}{U_+} - \frac{1}{U_-}}{\frac{1}{W_+^2} - \frac{1}{W_-^2}}. \qquad (12.54)$$

Теперь запишем уравнения (12.53) в другой форме

$$J^2 = W_+^2\left(\frac{1}{U_+} - E\right), \quad J^2 = W_-^2\left(\frac{1}{U_-} - E\right). \qquad (12.55)$$

Отсюда получим

$$E = \frac{\frac{W_+^2}{U_+} - \frac{W_-^2}{U_-}}{W_+^2 - W_-^2}. \qquad (12.56)$$

Интегрируя уравнение (12.23), находим

$$\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int\limits_{r_-}^{r} \sqrt{V} \left[\frac{1}{J^2U} - \frac{1}{W^2} - \frac{E}{J^2}\right]^{-1/2} \frac{dr}{W^2}. \qquad (12.57)$$

Для удобства вычислений введем новую независимую переменную

$$W = r + GM. \qquad (12.58)$$

Подставляя (12.54) и (12.56) в (12.57) и переходя к новой независимой переменной W, находим

$$\varphi(W) = \varphi(W_-) +$$

$$+ \int\limits_{W_-}^{W} \left\{\frac{W_-^2[U^{-1}(W) - U_-^{-1}] - W_+^2[U^{-1}(W) - U_+^{-1}]}{W_-^2 W_+^2 [U_+^{-1} - U_-^{-1}]}\right\}^{-1/2} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{V} dW}{W^2}. \qquad (12.59)$$

На основании (12.31) для функции $U^{-1}(W)$ во втором порядке по гравитационной постоянной G имеем

$$U^{-1}(W) = 1 + \frac{2GM}{W} + \frac{(2GM)^2}{W^2}. \qquad (12.60)$$

Мы должны учесть второй порядок в $U^{-1}(W)$, поскольку, если ограничиться только первым порядком по G, то выражение под корнем в фигурных скобках не будет зависеть от гравитационной постоянной. Но это означает, что при расчете мы из-за этого обстоятельства потеряем слагаемое, содержащее G в первом порядке. У нас будет учтено только слагаемое первого порядка по G, содержащееся в функции V. Для метрического коэффициента V достаточно учесть только первый порядок по G:

$$V(W) = 1 + \frac{2GM}{W}. \tag{12.61}$$

В приближении (12.60) числитель подкоренного выражения в фигурных скобках (12.59) является квадратичной функцией от переменной $\frac{1}{W}$ следующего вида:

$$2GMW_-W_+(W_+ - W_-)\left[\frac{1}{W^2} - \frac{1}{W}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{W_-W_+}\right] = 2GMW_-W_+(W_+ - W_-) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_-}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right). \tag{12.62}$$

Знаменатель подкоренного выражения в (12.59) равен

$$W_-^2 W_+^2 \left[U_+^{-1} - U_-^{-1}\right] = 2GMW_-W_+(W_- - W_+) \times$$
$$\times \left[1 + 2GM\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\right]. \tag{12.63}$$

Учитывая (12.62) и (12.63), находим подкоренное выражение в фигурных скобках (12.59)

$$\frac{1}{\left[1 + 2GM\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\right]}\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right). \tag{12.64}$$

Подставляя (12.61) и (12.64) в (12.59) и ограничиваясь только членами первого порядка по гравитационной постоянной G, получим

$$\varphi(W) = \varphi(W_-) + \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)2GM\right] \times$$
$$\times \int\limits_{W_-}^{W} \frac{\left(1 + \frac{MG}{W}\right)dW}{W^2\left[\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right)\right]^{1/2}}. \tag{12.65}$$

Для вычисления интеграла в (12.65) введем новую переменную ψ:

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_+} + \frac{1}{W}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_+} - \frac{1}{W_-}\right)\sin\psi. \qquad (12.66)$$

Используя (12.66), получим

$$\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right) = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W_+}\right)^2 \cos^2\psi. \qquad (12.67)$$

После подстановки (12.66) и (12.67) находим

$$I(W) = \int\limits_{W_-}^{W} \frac{\left(1 + \frac{MG}{W}\right) dW}{W^2\left[\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W}\right)\left(\frac{1}{W} - \frac{1}{W_+}\right)\right]^{1/2}} = \\ = \psi + GM\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\psi + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} - \frac{1}{W_+}\right)\cos\psi\right\}\Big|_{-\pi/2}^{\psi}.$$

Отсюда получим

$$I(W_+) = \pi + GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right)\pi. \qquad (12.68)$$

Используя (12.68), из (12.65) имеем

$$\varphi(W_+) - \varphi(W_-) = \pi + \frac{3}{2}\pi GM\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right). \qquad (12.69)$$

Отсюда изменение угла φ за один оборот равно

$$2|\varphi(W_+) - \varphi(W_-)| = 2\pi + 6\pi GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_-} + \frac{1}{W_+}\right). \qquad (12.70)$$

Смещение перигелия за один оборот будет

$$\delta\varphi = 2|\varphi(W_+) - \varphi(W_-)| - 2\pi =$$
$$= 6\pi GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{W_+} + \frac{1}{W_-}\right) \tag{12.71}$$

или, возвращаясь к переменной, определяемой из (12.58), в том же приближении по G получим

$$\delta\varphi = 6\pi GM\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right). \tag{12.72}$$

Величины r_- и r_+ выражаются через большую полуось a и эксцентриситет e

$$r_\pm = (1 \pm e)a. \tag{12.73}$$

Обычно вводят фокальный параметр

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right). \tag{12.74}$$

Используя (12.73), находим

$$L = (1 - e^2)a. \tag{12.75}$$

Подставляя (12.75) в (12.74), получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) = \frac{1}{(1 - e^2)a}. \tag{12.76}$$

Учитывая (12.76) в (12.72), находим

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a}. \tag{12.77}$$

В формуле (12.77) мы восстановили зависимость от скорости света. Для Меркурия

$$e = 0,2056, \ a = 57,91 \cdot 10^{11}\text{см}. \tag{12.78}$$

Подставляя эти значения в формулу (12.77), получим смещение перигелия Меркурия за один оборот

$$\delta\varphi_{☿} = 0,1037''. \tag{12.79}$$

За столетие Меркурий совершает 415 оборотов, а поэтому смещение перигелия Меркурия за этот период равно

$$\Delta\varphi = 43,03''. \tag{12.80}$$

Современные данные подтверждают этот результат с точностью до 1%. Астрономы изучают смещение перигелия Меркурия в течение нескольких столетий. В 1882 году С.Ньюкомб установил различие между наблюдениями и теоретическими расчетами, равное 43″ за столетие. В настоящее время оптические наблюдения, которые ведутся более 200 лет, дают неточность определения скорости прецессии — это приблизительно $0,4''$ за столетие.

В заключение запишем уравнение (12.23) в переменных $u = \frac{1}{W}$, $W = r + GM$.

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{u^2}{V} - \frac{1}{J^2UV} + \frac{E}{J^2V} = 0. \tag{12.81}$$

Для статического сферически-симметричного поля в силу (12.31) имеем

$$U = V^{-1} = (1 - 2GMu). \tag{12.82}$$

Дифференцируя (12.81) по φ и учитывая (12.82), получим

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{EGM}{J^2c^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2. \tag{12.83}$$

Здесь мы восстановили зависимость от скорости света. Это уравнение отличается от уравнения, получаемого на основе ньютоновой теории гравитации, дополнительным членом $\frac{3GM}{c^2}u^2$. Как мы видим, этот член является релятивистским, именно он и приводит к смещению перигелия планет.

Выражая интегралы движения E и J^2 через эксцентриситет и большую полуось в нерелятивистском приближении, имеем

$$\frac{GME}{c^2J^2} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}. \tag{12.84}$$

Таким образом, в нерелятивистском приближении мы получим уравнение ньютоновой теории гравитации

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)}, \quad \sigma = \frac{1}{r}. \tag{12.85}$$

Именно такое выражение находят в классической механике, если исходные уравнения Ньютона отнесены к инерциальной системе координат. В нашем расчете это естественно, поскольку исходные уравнения РТГ также записаны в инерциальной системе координат.

Сравнивая движение согласно (12.83) с движением в соответствии с формулой (12.85), мы и определяем эффект смещения перигелия за один оборот тела вокруг Солнца. А.Эйнштейн при вычислении смещения перигелия Меркурия и отклонения луча света Солнцем интуитивно рассматривал гравитацию как слабое физическое поле на фоне пространства Минковского. Именно такой подход и привел его к хорошо известным формулам для этих гравитационных эффектов. Однако эти формулы не являются однозначными следствиями уравнений ОТО. Эйнштейн при их получении скорее следовал собственной научной интуиции, чем логике своей теории. Однако при нахождении упомянутых эффектов в 1915 году он все же отметил: "*Пусть в начале координатной системы находится материальная точка (Солнце). Гравитационное поле, создаваемое этой материальной точкой, можно вычислить из уравнений путем последовательных приближений. Однако можно полагать, что при заданной массе Солнца $g_{\mu\nu}$ еще не полностью определяются уравнениями (1) и (3).* (Здесь имеются ввиду уравнения $R_{\mu\nu} = 0$ при ограничении

$|g_{\mu\nu}| = -1$. — *Прим. А.Л.*) *Это следует из того, что эти уравнения ковариантны относительно любых преобразований с определителем 1. Тем не менее, мы, по-видимому, вправе предположить, что такими преобразованиями все эти решения можно перевести друг в друга и что, следовательно (при заданных граничных условиях) они отличаются друг от друга лишь формально, а не физически. Следуя этому убеждению, я ограничусь сначала тем, что получу здесь* **одно** *из решений, не касаясь вопроса, является ли оно* **единственно** *возможным*"[34].

В последующем вопрос о других возможных внешних решениях возник в двадцатых годах, когда французский математик Пенлеве подверг критике результаты Эйнштейна. Следуя Пенлеве, рассмотрим этот вопрос с точки зрения точного внешнего решения (12.31a) уравнений ОТО для статического сферически-симметричного тела.

В ОТО вычисление величины смещения перигелия Меркурия на основе точного внешнего решения (12.31a), при выборе произвольных функций $B(r)$ и $W(r)$ в простейшем виде

$$B(r) = 0, \quad W(r) = r + (\lambda + 1)GM,$$

привело бы к следующему результату:

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{L}\left[1 - \frac{(1+\lambda)GM}{L}(1+e^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{9GM}{2L}\left(1 + \frac{e^2}{18}\right)\right]. \tag{12.72a}$$

Это выражение приведено в монографии [10], там же даны ссылки на оригинальные статьи. Из формулы (12.72a) видно, что неоднозначность в ОТО в предсказании эффекта смещения перигелия Меркурия также имеет место, но проявляется она не в первом порядке по G, а во втором

[34] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.36, с.440.

и поэтому находится за пределами точности современных данных наблюдений, если ограничиться небольшими значениями произвольного параметра λ. Однако с принципиальной точки зрения можно заключить, что неоднозначность присутствует и при таком выборе λ, когда закон тяготения Ньютона выполняется. Но из ОТО не следует, что параметр λ должен быть небольшим. Поскольку в решении (12.31a) произвольные функции $B(r)$ и $W(r)$ в ОТО не определяются, поэтому для избранного частного случая параметр λ может принимать любые значения. Если его выбрать достаточно большим, так чтобы второй член в скобках в выражении (12.72a) был порядка 10^{-1}, то мы пришли бы к противоречию как с данными наблюдений по величине смещения перигелия Меркурия, так и с законом всемирного тяготения Ньютона. Но это означает, в силу произвола λ, что закон Ньютона не является единственно возможным следствием ОТО. Если бы он нам был неизвестен, то из ОТО, как теоретической схемы, мы бы ни его, ни поправки к нему никогда не получили. Максимум, что мы могли бы установить, это асимптотику на бесконечности. **Все это свидетельствует о том, что, хотя ОТО и явилась крупным шагом в гравитации, после работ И.Ньютона, тем не менее, она оказалась не завершенной схемой, как по ее физическим представлениям, так и по основным уравнениям, которые используются для объяснения и предсказания гравитационных явлений.**

После резкой критики ОТО (в 20-х годах) П.Пенлеве и А.Гюлльстрандом по вопросу неоднозначности определения гравитационных эффектов, В.А.Фок (в 30-х годах) четко понял суть ОТО и ее не полную определенность. Фок при изучении островных систем распределения вещества в ОТО добавил к уравнениям Гильберта–Эйнштейна гармонические координатные условия (фактически брались определенные уравнения в галилеевых координатах пространства Минковского и тем самым совершался выход за пределы ОТО) и получил полную систему гравитационных уравнений. В РТГ при изучении островных систем распределения вещества именно такая система уравнений возникает в инерциальной системе (в галилеевых координатах) из принципа наименьшего действия. Таким образом становится ясным, почему гармонические условия в галилеевых (декартовых) координатах являются универсальными уравнениями.

При изучении островных систем А.Эйнштейн и Л.Инфельд использовали другие координатные условия, однако в постньютоновском приближении они близки к гармоническим, а поэтому в этом приближении дают тот же результат. Таким образом, теория гравитации Фока позволила однозначно определить все эффекты в Солнечной системе. Но его подход был непоследовательным.

Путь РТГ — это полный отказ от представлений А.Эйнштейна о инерции и гравитации и возврат к физическому гравитационному полю в духе Фарадея–Максвелла, точное сохранение специальной теории относительности, объявление источником гравитационного поля универсальной сохраняющейся величины — тензора энергии-импульса всей материи, включая и гравитационное поле. Именно такой подход приводит к новой системе уравнений теории гравитации, устраняет принципиальные трудности ОТО, ликвидирует неоднозначность в определении гравитационных эффектов, предсказывает другое (в отличие от ОТО) развитие коллапса и Вселенной и в то же время сохраняет наиболее ценное, что содержится в ОТО: тензорный характер гравитации и риманово пространство. Но только теперь оно уже становится не исходным и фундаментальным, а только эффективным, возникающим из-за того, что источником гравитационного поля является тензор энергии-импульса всей материи, включая и гравитационное поле.

Все это находит отражение в полной системе гравитационных уравнений (5.19) и (5.20), которые отличаются от уравнений ОТО. Эффективное риманово пространство, возникающее в РТГ из-за действия гравитационного поля, имеет только простую топологию. Это означает, что никаких "чудес", которые возможны в ОТО из-за сложной топологии риманова пространства, в РТГ в принципе не может быть.

12.4. Прецессия гироскопа

Пью [42] и Шиффа [44] предложили поместить гироскоп на околоземную орбиту и исследовать его прецессию для изучения гравитационного поля Земли и проверки общей теории относительности. Именно в этом эффекте проявится наличие инерциальной системы, связанной с удаленными звездами. Для простоты будем считать гироскоп точечным пробным телом. Уравнение для момента гироскопа S_μ имеет следующий вид:

$$\frac{dS_\mu}{ds} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} S_\lambda \frac{dx^\nu}{ds}. \tag{12.86}$$

В системе, связанной с гироскопом, он не прецессирует, что и отражено в уравнении (12.86). Момент гироскопа $\vec{J}$ не меняется по величине, он, как мы покажем ниже, выражается через момент $\vec{S}$ и скорость $\vec{v}$. В системе покоя пробного тела $S_\mu = (0, \vec{S})$, а поэтому

$$S_\mu U^\mu = 0, \;\; U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{12.87}$$

Из равенства (12.87) получим

$$S_0 = -\frac{1}{c} S_i v^i, \;\; v^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{12.88}$$

Уравнение (12.86) для $\mu = i$ принимает вид

$$\frac{dS_i}{dt} = c\Gamma^j_{i0} S_j - \Gamma^0_{i0} v^j S_j + \Gamma^j_{ik} v^k S_j - \Gamma^0_{ik} v^j S_j \frac{1}{c}. \tag{12.89}$$

Для статического сферически-симметричного источника гравитационного поля в линейном приближении по гравитационной постоянной имеем

$$g_{00} = 1+2\Phi, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1-2\Phi, \quad \Phi = -\frac{GM}{c^2 r}. \tag{12.90}$$

Используя эти выражения, вычислим символы Кристоффеля

$$\begin{gathered}\Gamma^j_{i0} = 0, \quad \Gamma^0_{ik} = 0, \quad \Gamma^0_{i0} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}, \\ \Gamma^j_{ik} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^k}\delta_{ij} - \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\delta_{jk} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\delta_{ik}.\end{gathered} \tag{12.91}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12.89), получим

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -2(\vec{v}\vec{S})\nabla\Phi - (\vec{v}\,\nabla\Phi)\vec{S} + (\vec{S}\nabla\Phi)\vec{v}. \tag{12.92}$$

Интегралом движения этого уравнения будет выражение

$$\vec{J}^2 = \vec{S}^2 + 2\Phi\vec{S}^2 - (\vec{v}\vec{S})^2. \tag{12.93}$$

В этом легко убедиться, продифференцировав его по времени

$$\begin{gathered}2\vec{J}\frac{d\vec{J}}{dt} = 2\vec{S}\frac{d\vec{S}}{dt} + 4\Phi\vec{S}\frac{d\vec{S}}{dt} + \\ +2(\vec{v}\vec{S})\left\{(\vec{S}\nabla\Phi) + \vec{v}\left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right)\right\}.\end{gathered} \tag{12.94}$$

Оставляя в этом выражении главные члены, имеем

$$2\vec{J}\frac{d\vec{J}}{dt} = 2\vec{S}\frac{d\vec{S}}{dt} + 2(\vec{v}\vec{S})(\vec{S}\nabla\Phi). \tag{12.95}$$

Умножая уравнение (12.92) на $\vec{S}$ и оставляя главные члены, получим

$$\vec{S}\frac{d\vec{S}}{dt} = -(\vec{v}\vec{S})(\vec{S}\nabla\Phi). \tag{12.96}$$

Подставляя это выражение в (12.95), находим

$$\vec{J}\frac{d\vec{J}}{dt} = 0. \tag{12.97}$$

Таким образом, мы установили, что выражение (12.93) является интегралом движения уравнения (12.92). На основании (12.93) можно построить вектор $\vec{J}$. В пределах точности он имеет вид

$$\vec{J} = (1+\Phi)\vec{S} - \frac{1}{2}\vec{v}(\vec{v}\vec{S}). \tag{12.98}$$

Дифференцируя (12.98) по времени, в пределах нашей точности получим

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{J}], \quad \vec{\Omega} = -\frac{3}{2}[\vec{v}, \nabla\Phi]. \tag{12.99}$$

Вектор $\vec{J}$, оставаясь одинаковым по величине, прецессирует со скоростью $|\vec{\Omega}|$ вокруг направления вектора $\vec{\Omega}$. В настоящее время идет подготовка такого эксперимента. Прецессия гироскопа, определяемая формулой (12.99), показывает, что система координат, связанная со свободно движущимся гироскопом, не является инерциальной. С точки зрения РТГ это очевидно, поскольку движение гироскопа в гравитационном поле есть движение ускоренное по отношению к инерциальной системе координат, связанной с удаленными звездами. Именно поэтому система координат, связанная с гироскопом, будет неинерциальной, что и вызывает прецессию гироскопа. В ОТО система координат, связанная со свободно движущимся гироскопом, считается инерциальной. Но тогда совершенно неясно, почему эта инерциальная система вращается с угловой частотой $|\vec{\Omega}|$ относительно удаленных звезд.

12.5. Гравитационное смещение спектральных линий

Рассмотрим стационарное гравитационное поле, т.е. когда метрические коэффициенты не зависят от времени. Пусть из точки e исходит излучение от источника, а в точке p оно принимается приемником. Если источник испускал излучение в течение времени $(dt)_e$, то приемник будет воспринимать его также в течение того же времени, поскольку гравитационное поле стационарно.

Собственное время в точке e равно

$$(d\tau)_e = (\sqrt{g_{00}}dt)_e, \tag{12.100}$$

а в точке приемника p оно будет

$$(d\tau)_p = (\sqrt{g_{00}}dt)_p. \tag{12.101}$$

Но поскольку время $(dt)_e = (dt)_p$, из формул (12.100) и (12.101) получим

$$\frac{(d\tau)_e}{(d\tau)_p} = \sqrt{\frac{(g_{00})_e}{(g_{00})_p}}. \tag{12.102}$$

Таким образом, промежуток собственного времени, в течение которого источник испускал сигнал, не равен промежутку собственного времени, в течение которого приемник принимал сигнал, поскольку гравитационное поле в точке e и p было разным.

Если перейти к частоте света ω, то получим

$$\frac{\omega_e}{\omega_p} = \sqrt{\frac{(g_{00})_p}{(g_{00})_e}}. \tag{12.103}$$

Здесь ω_e — частота света, измеренная в точке источника e, а ω_p — частота света, пришедшего из точки e, и измеренная в точке приемника p. Изменение частоты характеризуется величиной

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_e - \omega_p}{\omega_p}. \tag{12.104}$$

На основании (12.103) и (12.104) находим

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \sqrt{\frac{(g_{00})_p}{(g_{00})_e}} - 1. \tag{12.105}$$

Для слабого гравитационного поля имеем

$$g_{00} = 1 - 2U. \tag{12.106}$$

Подставляя это выражение в (12.105), получим

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = U_e - U_p. \tag{12.107}$$

Если источник (например, атом) находится в сильном гравитационном поле, а приемник в более слабом, то наблюдается красное смещение и величина $\delta\omega/\omega$ будет положительна.

13. Некоторые другие физические выводы РТГ

На больших расстояниях r от статического сферически-симметричного тела метрические коэффициенты имеют вид

$$U(r) = 1 - \frac{2M}{r}e^{-mr}, \quad V(r) = 1 + \frac{2M}{r}e^{-mr},$$
$$W(r) = \left(1 + \frac{M}{r}e^{-mr}\right).$$

Остановимся на проблеме излучения слабых гравитационных волн при наличии массы гравитона. Давно хорошо известно, что в линейной тензорной теории введение массы гравитона всегда сопровождается "духами". Однако в работах [15, 16, 39] показано, что интенсивность гравитационного излучения массивных гравитонов в нелинейной теории является положительно определенной величиной, равной

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega\omega^2 q\{|T_2^1|^2 + \frac{1}{4}|T_1^1 - T_2^2|^2 +$$
$$+\frac{m^2}{\omega^2}(|T_3^1|^2 + |T_3^2|^2) + \frac{3m^4}{4\omega^4}|T_3^3|^2\}, \tag{13.1}$$

здесь $q = \left(1 - \frac{m^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$.

В РТГ, так же как и в ОТО, вне вещества плотность тензора энергии-импульса гравитационного поля в римановом пространстве равна нулю:

$$T_g^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_g}{\delta g_{\mu\nu}} = 0\,. \tag{13.2}$$

Однако из выражения (13.2) не следует отсутствие гравитационного поля. Именно в этом выражении особо проявляется разница между гравитационным полем и другими физическими полями. Но это означает, что поток энергии гравитационного поля в теории гравитации не определяется компонентами плотности тензора T_g^{0i}, вычисленными на решениях уравнений (13.2), поскольку они равны нулю. Задача определения потока энергии в теории гравитации в отличие от других теорий требует иного подхода.

Ю.М.Лоскутов [15, 16, 39] находит решение (13.2) в форме

$$\tilde{\Phi}^{\mu\nu} = \chi^{\mu\nu} + \psi^{\mu\nu} , \tag{13.3}$$

где величины $\chi^{\mu\nu}$ и $\psi^{\mu\nu}$ одного порядка малости, причем $\psi^{\mu\nu}$ описывает расходящиеся от источника волны, а $\chi^{\mu\nu}$ характеризует фон. Перенос энергии осуществляется только расходящимися волнами. В работе [15] показано, что фактически поток гравитационной энергии определяется величиной $T_g^{0i}(\psi)$, вычисленной не на самих решениях уравнений (13.2), а только на той части решений, которая описывает расходящиеся волны $\psi^{\mu\nu}$. При этом учитывается, что гравитоны распространяются не в пространстве Минковского, как это всегда имеет место в линейной теории, а в эффективном римановом пространстве. Поэтому в линейном приближении выполняется равенство

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds} - 1 = \frac{d\sigma^2 - ds^2}{ds^2} \simeq \\ \simeq -\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu} + \Phi^{\mu\nu}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\cdot\frac{dx^\beta}{d\sigma}\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta} \, . \end{aligned} \tag{13.4}$$

Именно последовательный учет этого обстоятельства в процессе нахождения интенсивности и приводит автора к положительно определенному потоку энергии, определяемому формулой (13.1), полученный результат имеет принципиальное значение, поскольку изменяет сложившиеся представления и поэтому с необходимостью требует дальнейшего анализа.

Следует отметить, что система гравитационных уравнений (5.19), (5.20) является гиперболической, причем принцип причинности и обеспечивает существование во всем пространстве пространственноподобной поверхности, которую каждая непространственноподобная кривая в римановом пространстве пересекает только один раз, т.е., иначе говоря, существует глобальная поверхность Коши, на которой и задаются для той или иной задачи начальные физические условия. Р.Пенроузом и С.Хокингом [32] при определенных общих условиях доказаны теоремы о существовании сингулярности в ОТО. На основании уравнений (5.21а) вне вещества для изотропных векторов риманова пространства, в силу условий причинности (6.12а), имеет место неравенство

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \leq 0\ . \tag{13.5}$$

Условия вышеупомянутых теорем противоположны неравенству (13.5) и поэтому в РТГ они неприменимы.

В РТГ пространственноподобные события в отсутствие гравитационного поля никогда не могут стать под действием гравитационного поля времениподобными. На основании принципа причинности эффективное риманово пространство в РТГ будет обладать изотропной и времениподобной геодезической полнотой. Согласно РТГ, инерциальная система координат определяется по распределению вещества и гравитационного поля во Вселенной (принцип Маха).

В ОТО поля инерции и гравитации неразделимы. А.Эйнштейн об этом писал: "*...не существует никакого реального разделения на инерцию и гравитацию, поскольку ответ на вопрос о том, находится ли тело в определенный момент исключительно под действием инерции или под комбинированным воздействием инерции и гравитации, зависит от системы координат, т.е. от способа рассмотрения*"[35]. Поля инерции удовлетворяют уравнениям Гильберта-Эйнштейна. В РТГ гравитационное поле и

[35] А.Эйнштейн. Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I, ст.33, с.422.

поля инерции, определяемые метрическим тензором пространства Минковского, разделены, они не имеют ничего общего. Они разной природы. Поля инерции не являются решениями уравнений (5.19), (5.20) РТГ. В РТГ поля инерции задаются метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$, а гравитационное поле $\tilde{\Phi}^{\mu\nu}$ определяется из уравнений гравитации (5.19), (5.20).

В заключение следует отметить, что представление о том, что можно произвольно выбирать как геометрию (Г), так и физику (Ф), поскольку якобы только сумма (Г+Ф) является предметом проверки на опыте, не совсем правильно. Выбор псевдоевклидовой геометрии с метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ продиктован как фундаментальными физическими принципами — интегральными законами сохранения энергии-импульса и момента количества движения, так и другими физическими явлениями. Таким образом, физика (на современном этапе) однозначно определяет структуру геометрии пространства-времени, в которой развиваются все физические поля, в том числе и гравитационное. Универсальное гравитационное поле, согласно РТГ, создает эффективное риманово пространство с простой топологией, при этом пространство Минковского не исчезает, оно проявляется в уравнениях теории и отражает фундаментальный принцип — принцип относительности. Эффективное риманово пространство имеет полевую природу.

На основании РТГ можно сделать следующие общие выводы:

Представление гравитационного поля как физического поля, обладающего тензором энергии-импульса, коренным образом изменяет общую картину гравитации, которая ранее сложилась на основе ОТО. Во-первых, теория гравитации становится в один ряд с другими физическими теориями, в основе которых лежит принцип относительности, т.е. исходное пространство — это пространство Минковского. Отсюда непосредственно следует, что для всех явлений природы, в том числе и гравитационных, имеют место фундаментальные физические законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Поскольку источником гравитационного поля является универсальная величина — сохраняющийся тензор энергии-импульса материи (включая и гравитационное поле), то возникает эффективное риманово пространство-время, которое имеет полевую природу. Так как эффективное риманово пространство-время образуется из-за действия гравитационного поля, то оно автоматически имеет простую топологию и описывается в одной системе координат. Силы инерции, в отличие от ОТО, не имеют никакого отношения к силам гравитации, так как они разной природы, первые возникают из-за выбора системы координат в пространстве Минковского, тогда как вторые обязаны присутствию вещества. Теория гравитации, как и все другие физические теории (в отличие от ОТО), удовлетворяет принципу соответствия.

Во-вторых, полная система уравнений теории гравитации позволяет однозначно определить гравитационные эффекты в Солнечной системе и приводит к другим (качественно отличным от ОТО) предсказаниям как об эволюции объектов больших масс, так и о развитии однородной и изотропной Вселенной. Теория показывает невозможность образования "черных дыр" (объектов, не имеющих материальных границ и "отрезанных" от внешнего мира) и предсказывает существование во Вселенной большой скрытой массы "темной" материи. Из теории следует, что Большого взрыва не было, а когда-то (около 10-15 млрд лет) в прошлом во Вселенной было состояние с большой плотностью и температурой, при этом так называемое "расширение" Вселенной, наблюдаемое по красному смещению, связано не с относительным движением вещества, а с изменением гравитационного поля со временем. Вещество покоится в инерциальной системе отсчета. Пекулярные скорости галактик относительно инерциальной системы координат возникли из-за неоднородности в распределении плотности вещества, которая и привела к собиранию вещества в период, когда Вселенная стала прозрачной.

Универсальные интегральные законы сохранения энергии-импульса и универсальные свойства материи, такие, например, как гравитационные взаимодействия, находят отражение в метрических свойствах пространства-времени. Если первые находят воплощение в псевдоевклидовой геометрии пространства-времени, то вторые — в эффективной римановой геометрии пространства-времени, возникшей из-за присутствия гравитационного поля в пространстве Минковского. В структуру эффективной геометрии можно отнести все, что имеет общий характер для всей материи. Но при этом пространство Минковского обязательно присутствует, что и приводит к интегральным законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения, а также обеспечивает соблюдение принципа соответствия при выключении гравитационного поля и других универсальных полей.

Установим соотношение

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}}, \tag{A.1}$$

здесь

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right), \tag{A.2}$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}\right), \tag{A.3}$$

звездочкой в формуле (A.1) обозначена вариационная производная от плотности лагранжиана по явно входящей в L метрике $\gamma_{\mu\nu}$. После дифференцирования получим

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}, \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\partial^\star L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}. \tag{A.5}$$

Подставим эти выражения в формулу (A.2):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} + \\
&+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \cdot \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right) = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \\
&+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}\right) \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} + \\
&+ \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}}\right). \tag{A.7}$$

Для этой цели запишем производную $g_{\alpha\beta,\sigma}$ в форме

$$g_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} , \tag{A.8}$$

отсюда легко найти

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} \delta^\rho_\sigma . \tag{A.9}$$

Дифференцируя это выражение, имеем

$$\partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} . \tag{A.10}$$

С другой стороны, дифференцируя (A.8) по $\gamma_{\mu\nu}$, имеем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \gamma_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \gamma_{\lambda\omega} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu} \partial \Phi_{\lambda\omega}} \partial_\sigma \Phi_{\lambda\omega} . \tag{A.11}$$

Сравнивая (A.10) и (A.11), найдем

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\rho \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\rho}} \right) = 0 . \tag{A.12}$$

Учитывая это соотношение, в (A.6) получаем

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\tau}} \right) \frac{\partial g_{\alpha\beta,\tau}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} . \tag{A.13}$$

Подставляя (A.9) в (A.13), найдем

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \left[\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\sigma}} \right) \right] \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} , \tag{A.14}$$

т.е.

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} . \tag{A.15}$$

Аналогично вычисляется

$$\frac{\delta L}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\lambda\rho}} \frac{\partial \tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial g_{\alpha\beta}} . \tag{A.16}$$

Используя (A.16), выражение (A.15) можно записать в виде

$$\frac{\delta L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{\delta^\star L}{\delta \gamma_{\mu\nu}} + \frac{\delta L}{\delta \tilde{g}^{\lambda\rho}} \frac{\partial \tilde{g}^{\lambda\rho}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} . \tag{A.17}$$

Плотность лагранжиана собственно гравитационного поля имеет вид

$$L_g = L_{g0} + L_{gm} \ , \tag{Б.1}$$

$$L_{g0} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left(G^{\tau}_{\lambda\alpha}G^{\lambda}_{\tau\beta} - G^{\tau}_{\alpha\beta}G^{\lambda}_{\tau\lambda}\right), \tag{Б.2}$$

$$L_{gm} = -\frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right). \tag{Б.3}$$

Тензор третьего ранга $G^{\tau}_{\alpha\beta}$ равен

$$G^{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\tau\lambda}(D_\alpha g_{\beta\lambda} + D_\beta g_{\alpha\lambda} - D_\lambda g_{\alpha\beta}) \ , \tag{Б.4}$$

он выражается через символы Кристоффеля риманова пространства и пространства Минковского:

$$G^{\tau}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} - \gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \ . \tag{Б.5}$$

Вычислим вариационную производную от L_g по явно входящей метрике пространства Минковского $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} - \partial_\sigma\left(\frac{\partial L_{g0}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}}\right). \tag{Б.6}$$

Для этой цели проведем некоторые подготовительные вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} + \gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}) \ , \\ \frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\lambda\alpha} + \gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}) \ , \end{aligned} \tag{Б.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{1}{4}\Big[\gamma^{\lambda\mu}(\delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}) + \\ &+\gamma^{\lambda\nu}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} + \delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}) - \gamma^{\lambda\sigma}(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{\mu}_{\beta})\Big] \ , \\ \frac{\partial G^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} &= -\frac{\partial\gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial\gamma_{\mu\nu,\sigma}} = -\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\delta^{\sigma}_{\alpha} \ . \end{aligned} \tag{Б.8}$$

Дифференцируя (Б.2), получаем

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial G^{\tau}_{\alpha\lambda}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}G^{\lambda}_{\tau\beta} + G^{\tau}_{\lambda\alpha}\frac{\partial G^{\lambda}_{\tau\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} - \right.$$
$$\left. -\frac{\partial G^{\tau}_{\alpha\beta}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}G^{\lambda}_{\tau\lambda} - G^{\tau}_{\alpha\beta}\frac{\partial G^{\lambda}_{\tau\lambda}}{\partial \gamma_{\mu\nu}}\right].$$

Используя в этом равенстве выражения (Б.7), найдем

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left\{G^{\tau}_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\tau\beta} + G^{\tau}_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\tau\beta} - \frac{1}{2}G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\mu}\gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\nu}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}G^{\tau}_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\mu}\gamma^{\nu}_{\tau\lambda} - \frac{1}{2}G^{\tau}_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda\nu}\gamma^{\mu}_{\tau\lambda}\right\} = \frac{1}{32\pi}B^{\mu\nu}. \quad \text{(Б.9)}$$

С помощью производных (Б.8) получим

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial \gamma_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{1}{32\pi}A^{\sigma\mu\nu}, \quad \text{(Б.10)}$$

где

$$A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\mu}(G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} + G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu}) -$$
$$-\gamma^{\mu\nu}G^{\sigma}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} + \gamma^{\tau\nu}(G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu}) +$$
$$+\gamma^{\tau\sigma}(G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} - G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta}). \quad \text{(Б.10}')$$

Плотность тензора $A^{\sigma\mu\nu}$ симметрична по индексам μ и ν. Обычная производная от этой плотности может быть представлена в форме

$$\partial_\sigma A^{\sigma\mu\nu} = D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - \gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu} - \gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho}.$$

Подставляя в (Б.6) выражения (Б.9) и (Б.10), найдем

$$\frac{\delta^\star L_{g0}}{\delta \gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}B^{\mu\nu} - \frac{1}{32\pi}D_\sigma A^{\sigma\mu\nu} +$$
$$+\frac{1}{32\pi}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu} + \frac{1}{32\pi}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho}. \quad \text{(Б.11)}$$

Запишем плотность тензора $A^{\sigma\rho\nu}$ в форме

$$A^{\sigma\rho\nu}=(G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\nu\beta}-G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\nu\beta})+(G^{\nu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\beta}-G^{\nu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\beta})-$$
$$-(G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\nu}-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\nu})+G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\rho\beta}+G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\beta}-$$
$$-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\rho}-G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\rho\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta},$$

в скобках образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ. Такая запись облегчает нахождение выражения для величины $\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu}$, поскольку при этом автоматически исчезают члены, антисимметричные по индексам σ и ρ.

$$\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu}=2G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\rho\beta}-$$
$$-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\sigma\rho}-G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\gamma^{\nu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}. \qquad (Б.12)$$

Аналогично представляя $A^{\sigma\mu\rho}$ в виде

$$A^{\sigma\mu\rho}=(G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\mu\beta}-G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\beta})+(G^{\mu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\beta}-G^{\mu}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\rho\beta})+$$
$$+(G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\rho}-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\rho}\tilde{g}^{\sigma\mu})+G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\rho\beta}+G^{\rho}_{\tau\beta}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\beta}-$$
$$-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\rho}-G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\mu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta},$$

где в скобках опять образованы антисимметричные члены по индексам σ и ρ, получим

$$\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho}=2G^{\sigma}_{\tau\beta}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\rho\beta}-$$
$$-G^{\lambda}_{\tau\lambda}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\sigma\rho}-G^{\sigma}_{\alpha\beta}\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\gamma^{\mu\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}. \qquad (Б.13)$$

Суммируя (Б.12) и (Б.13), легко убедиться в следующем равенстве:

$$\gamma^{\mu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\rho\nu}+\gamma^{\nu}_{\sigma\rho}A^{\sigma\mu\rho}=-B^{\mu\nu}. \qquad (Б.14)$$

С учетом этого равенства выражение (Б.11) запишем в форме

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}}=-\frac{1}{32\pi}D_{\sigma}A^{\sigma\mu\nu}. \qquad (Б.15)$$

Учитывая равенства

$$G^{\lambda}_{\tau\lambda}=\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}D_{\tau}g_{\lambda\rho},\ D_{\tau}\sqrt{-g}=\sqrt{-g}G^{\lambda}_{\tau\lambda},$$

найдем

$$
\begin{aligned}
G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} + G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\nu} &= -D_{\tau}\tilde{g}^{\nu\sigma}, \\
G^{\sigma}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\sigma\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\sigma\mu} &= -D_{\tau}\tilde{g}^{\mu\sigma}, \qquad (Б.16)\\
G^{\nu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\mu\beta} + G^{\mu}_{\tau\beta}\tilde{g}^{\nu\beta} - G^{\lambda}_{\tau\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} &= -D_{\tau}\tilde{g}^{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

Подставляя эти выражения в (Б.10′), получаем

$$A^{\sigma\mu\nu} = \gamma^{\tau\sigma}D_{\tau}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}D_{\tau}\tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu}D_{\tau}\tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu}D_{\tau}\tilde{g}^{\mu\sigma}.$$

Используя это выражение в (Б.15), найдем

$$\frac{\delta^{\star}L_{g0}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}J^{\mu\nu}, \qquad (Б.17)$$

где $J^{\mu\nu} = -D_{\sigma}D_{\tau}(\gamma^{\tau\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}\tilde{g}^{\tau\sigma} - \gamma^{\tau\mu}\tilde{g}^{\nu\sigma} - \gamma^{\tau\nu}\tilde{g}^{\mu\sigma})$. На основании (Б.3) имеем

$$\frac{\delta^{\star}L_{gm}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = -\frac{m^2}{32\pi}(\tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\mu\nu}) = -\frac{m^2}{32\pi}\tilde{\Phi}^{\mu\nu}. \qquad (Б.18)$$

Таким образом, учитывая (Б.1) и используя (Б.17) и (Б.18), находим

$$\frac{\delta^{\star}L_{g}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{32\pi}(J^{\mu\nu} - m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}), \qquad (Б.19)$$

а следовательно,

$$-2\frac{\delta^{\star}L_{g}}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}(-J^{\mu\nu} + m^2\tilde{\Phi}^{\mu\nu}). \qquad (Б.2\ 0)$$

Приложение Б*

В данном приложении, используя выражения (Б.2) и (Б.3) для плотности лагранжиана L_{g0} и L_{gm}, мы установим следующие равенства:

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta}, \quad \frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{m^2}{32\pi}(g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}), \tag{Б*.1}$$

здесь тензоры $\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}$, $\frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}$ по определению равны

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \frac{\partial L_{g0}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\sigma}}, \quad \frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} - \partial_\sigma \frac{\partial L_{gm}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}_{,\sigma}}. \tag{Б*.2}$$

Тензорные соотношения (Б*.1) проще всего установить в локальной римановой системе координат, где производные от компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ по координатам равны нулю, а следовательно, равны нулю и символы Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

На основании формулы

$$\frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\left(g^{\mu\tau}\Gamma^\nu_{\alpha\lambda} + g^{\nu\tau}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\right) \tag{Б*.3}$$

легко установить, что в указанной системе координат имеет место равенство

$$\frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right) \times$$
$$\times \left(\gamma^\tau_{\lambda\alpha}\gamma^\lambda_{\tau\beta} - \gamma^\tau_{\alpha\beta}\gamma^\lambda_{\tau\lambda}\right). \tag{Б*.4}$$

Здесь $\gamma^\lambda_{\tau\beta}$ — символы Кристоффеля пространства Минковского. Используя выражение

$$\frac{\partial \Gamma^\tau_{\alpha\lambda}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{1}{4}\{g^{\tau\mu}(\delta^\nu_\alpha\delta^\sigma_\lambda + \delta^\nu_\lambda\delta^\sigma_\alpha) + g^{\tau\nu}(\delta^\mu_\alpha\delta^\sigma_\lambda +$$
$$+\delta^\mu_\lambda\delta^\sigma_\alpha) - g^{\tau\sigma}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\lambda + \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\alpha)\}, \tag{Б*.5}$$

получим

$$-\frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big[(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})(\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}) -$$
$$- (g^{\alpha\mu}g^{\sigma\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\sigma})(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda})\Big]. \qquad (\text{Б}^*.6)$$

Отсюда в локальной римановой системе координат находим

$$-\partial_\sigma \frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right) \times$$
$$\times \left[(\partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}) - (\partial_\sigma\gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda})\right]. \qquad (\text{Б}^*.7)$$

На основании (Б*.4) и (Б*.7) в локальной римановой системе координат тензор (Б*.2) равен

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \frac{\partial L_{g0}}{\partial g_{\mu\nu,\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\Big(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} -$$
$$-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Big)\left(\partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - R_{\alpha\beta}(\gamma)\right). \qquad (\text{Б}^*.8)$$

В локальной римановой системе координат тензор кривизны риманова пространства второго ранга $R_{\alpha\beta}(g)$ имеет вид

$$R_{\alpha\beta}(g) = \partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}. \qquad (\text{Б}^*.9)$$

В выражении (Б*.8) тензор второго ранга $R_{\alpha\beta}(\gamma)$ равен

$$R_{\alpha\beta}(\gamma) = \partial_\sigma\gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \partial_\beta\gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} + \gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\gamma^{\lambda}_{\tau\lambda} - \gamma^{\tau}_{\lambda\alpha}\gamma^{\lambda}_{\tau\beta}.$$

В пространстве Минковского с метрикой $\gamma_{\mu\nu}$ и символами Кристоффеля $\gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ тензор $R_{\alpha\beta}(\gamma)$ равен нулю. Учитывая (Б*.9), а также равенство тензора $R_{\alpha\beta}(\gamma)$ нулю, тензорное соотношение (Б*.8) принимает вид

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right). \qquad (\text{Б}^*.10)$$

Равенство (Б*.10) установлено в локальной римановой системе координат, но в силу тензорного характера оно справедливо в любой системе координат.

Используя соотношение

$$dg = -g g_{\alpha\beta} d g^{\alpha\beta}, \tag{Б*.11}$$

находим

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = g \tilde{g}_{\alpha\beta}. \tag{Б*.12}$$

На основании равенства

$$\tilde{g}^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \sqrt{-g} \tag{Б*.13}$$

легко получить следующее соотношение:

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ -\frac{1}{2}(g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\lambda\beta} g_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{\nu\lambda} \right\}. \tag{Б*.14}$$

Поскольку на основании приложения А имеет место равенство

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\delta L_{g0}}{\delta g_{\lambda\nu}} \cdot \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}, \tag{Б*.15}$$

то, используя выражения (Б*.10) и (Б*.14), находим

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta}. \tag{Б*.16}$$

Аналогично имеем

$$\frac{\delta L_{gm}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\partial L_{gm}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{m^2}{32\pi}(g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}). \tag{Б*.17}$$

Складывая выражения (Б*.16) и (Б*.17), получим

$$\frac{\delta L_{g0}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{16\pi} R_{\alpha\beta} + \frac{m^2}{32\pi}(g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}). \tag{Б*.18}$$

Нетрудно получить и следующее соотношение:

$$\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} = \frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T\right), \qquad (\text{Б}^*.19)$$

здесь $T^{\lambda\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\lambda\nu}}$ — плотность тензора энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве.

В заключение приведем соотношения

$$D_\nu \sqrt{-g} = \partial_\nu \left(\sqrt{\frac{g}{\gamma}}\right) = \sqrt{-g} G^\lambda_{\nu\lambda},$$
$$\partial_\nu \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \Gamma^\lambda_{\nu\lambda}, \quad \partial_\nu \sqrt{-\gamma} = \sqrt{-\gamma} \gamma^\lambda_{\nu\lambda}, \qquad (\text{Б}^*.20)$$

которые используются при получении равенства (5.15).

Для любой заданной плотности лагранжиана L, при бесконечно малом изменении координат, вариация действия

$$S = \int L d^4x$$

будет равна нулю. Вычислим вариацию действия от плотности лагранжиана L_M

$$S_M = \int L_M(\tilde{g}^{\mu\nu}, \Phi_A) d^4x$$

вещества и установим сильное тождество. При преобразовании координат

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) , \qquad \text{(B.1)}$$

где $\xi^\mu(x)$ — бесконечно малый четырехвектор смещения, вариация действия при координатном преобразовании равна

$$\delta_c S_M = \int d^4x \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} \delta_L \Phi_A + \mathrm{div} \right) = 0. \qquad \text{(B.2)}$$

В этом выражении div обозначает дивергенциальные члены, которые несущественны для наших целей.

Эйлерова вариация определена как обычно:

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \Phi)} .$$

Вариации Ли $\delta_L \tilde{g}^{\mu\nu}, \delta_L \Phi_A$ при изменении координат легко вычисляются, если использовать закон преобразования величин $g^{\mu\nu}, \Phi_A$:

$$\begin{aligned} \delta_L \tilde{g}^{\mu\nu} &= \tilde{g}^{\lambda\mu} D_\lambda \xi^\nu + \tilde{g}^{\lambda\nu} D_\lambda \xi^\mu - D_\lambda(\xi^\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}), \\ \delta_L \Phi_A &= -\xi^\lambda D_\lambda \Phi_A + F^{B;\lambda}_{A;\sigma} \Phi_B D_\lambda \xi^\sigma , \end{aligned} \qquad \text{(B.3)}$$

D_λ — ковариантные производные в пространстве Минковского. Подставляя эти выражения в (В.2) и интегрируя по частям, получаем

$$\delta S_M = \int d^4x \left\{ -\xi^\lambda \left[D_\alpha \left(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_\lambda \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \right) + \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A \right] + \mathrm{div} \right\} = 0\,. \qquad (В.4)$$

В силу произвольности вектора ξ^λ из этого равенства находим сильное тождество, справедливое независимо от выполнения уравнений движения для полей. Он имеет вид

$$D_\alpha \left(2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\lambda\nu}} \tilde{g}^{\alpha\nu} \right) - D_\lambda \left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \right) \tilde{g}^{\alpha\beta} =$$
$$= -D_\sigma \left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} F^{B;\sigma}_{A;\lambda} \Phi_B \right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A} D_\lambda \Phi_A. \qquad (В.5)$$

Введем обозначения

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta},$$
$$T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = 2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}, \qquad (В.6)$$
$$\tilde{T}^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad \tilde{T} = \tilde{T}^{\alpha\beta} \tilde{g}_{\alpha\beta}.$$

Учитывая эти обозначения, левую часть тождества (В.5) можно записать в виде

$$D_\alpha (\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} D_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha (\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta}.$$

Правая часть этого равенства легко приводится к форме

$$\partial_\alpha (\tilde{T}_{\lambda\nu} \tilde{g}^{\alpha\nu}) - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \partial_\lambda \tilde{T}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\lambda\nu} \nabla_\alpha \left(\tilde{T}^{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\nu} \tilde{T} \right), \qquad (В.7)$$

здесь ∇_α — ковариантная производная в римановом пространстве. Выразим теперь выражение под знаком ковариантной производной ∇_α через плотность тензора $T^{\alpha\nu}$. Для этой цели воспользуемся формулой (A.16):

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}}, \tag{B.8}$$

где

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\alpha\beta}. \tag{B.9}$$

Используя соотношения

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\sigma} = \delta^\alpha_\sigma,$$

найдем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}(g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) . \tag{B.10}$$

По правилу дифференцирования определителей находим

$$dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}, \tag{B.11}$$

откуда имеем

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}. \tag{B.12}$$

Подставляя выражения (B.10) и (B.12) в (B.9), получим

$$\frac{\partial \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}[g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}] . \tag{B.13}$$

Используя это соотношение в (B.8), находим

$$\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \sqrt{-g}\left(\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \frac{1}{2}\frac{\delta L_M}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}\right) . \tag{B.14}$$

Учитывая обозначения (B.6), это выражение можно записать в виде

$$\sqrt{-g} T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{T}. \tag{B.15}$$

На основании равенства (B.15) сильное тождество (B.5) с учетом (B.7) принимает вид

$$g_{\lambda\nu}\nabla_\alpha T^{\alpha\nu} = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A}D_\lambda\Phi_A, \quad \text{или}$$

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\lambda = -D_\sigma\left(\frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A}F^{B;\sigma}_{A;\lambda}\Phi_B\right) - \frac{\delta L_M}{\delta \Phi_A}D_\lambda\Phi_A. \tag{B.16}$$

Тензор кривизны второго ранга $R_{\mu\nu}$ можно записать в форме

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\tilde{g}^{\alpha\beta}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} -$$
$$-\tilde{g}_{\nu\rho}D_\kappa D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho} - \tilde{g}_{\mu\kappa}D_\nu D_\rho \tilde{g}^{\kappa\rho}] + \frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\omega\tau} +$$
$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\rho\tau}D_\nu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\omega\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\omega}\tilde{g}_{\nu\rho}D_\tau \tilde{g}^{\omega\kappa}D_\kappa \tilde{g}^{\rho\tau} -$$
$$-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\rho\tau}(\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\nu\omega} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\kappa\omega})D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \qquad (\text{Г}.1)$$

Поднимая индексы путем умножения на $g^{\epsilon\mu}g^{\lambda\nu}$ и учитывая уравнение

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0\ , \qquad (\text{Г}.2)$$

получаем

$$-gR^{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\epsilon\lambda} - \frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} +$$
$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\mu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\lambda\tau} +$$
$$+\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\nu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\epsilon\tau} - \frac{1}{2}D_\tau \tilde{g}^{\epsilon\kappa}D_\kappa \tilde{g}^{\lambda\tau} -$$
$$-\frac{1}{4}\left(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho}\right)\tilde{g}^{\epsilon\mu}\tilde{g}^{\lambda\nu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha \tilde{g}^{\epsilon\rho}D_\beta \tilde{g}^{\lambda\tau} + \frac{1}{4}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \qquad (\text{Г}.3)$$

Отсюда находим

$$-gR = \frac{1}{2}g_{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\epsilon\lambda} - g_{\kappa\rho}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta \tilde{g}^{\kappa\rho} + \frac{1}{2}g_{\rho\tau}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\kappa \tilde{g}^{\mu\tau} -$$
$$-\frac{1}{4}(\tilde{g}_{\omega\rho}\tilde{g}_{\kappa\tau} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\omega\tau}\tilde{g}_{\kappa\rho})\sqrt{-g}\tilde{g}^{\mu\nu}D_\mu \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\nu \tilde{g}^{\omega\tau} -$$
$$-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\rho\tau}\tilde{g}^{\alpha\beta}g_{\epsilon\lambda}D_\alpha \tilde{g}^{\epsilon\rho}D_\beta \tilde{g}^{\lambda\tau} + \tilde{g}_{\rho\tau}g_{\kappa\omega}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha \tilde{g}^{\kappa\rho}D_\beta \tilde{g}^{\omega\tau}. \qquad (\text{Г}.4)$$

С помощью выражений (Г.3) и (Г.4) найдем

$$-g\left(R^{\epsilon\lambda}-\frac{1}{2}g^{\epsilon\lambda}R\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma}\right)\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}D_\alpha\tilde{g}^{\sigma\tau}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa}-\right.$$
$$-\frac{1}{4}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\left(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\kappa}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\nu\kappa}\tilde{g}_{\tau\sigma}\right)D_\alpha\tilde{g}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\nu\kappa}+$$
$$+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\sigma\tau}D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau}-$$
$$-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\tau}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{g}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{g}^{\alpha\tau}+$$
$$\left.+D_\alpha\tilde{g}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{g}^{\lambda\alpha}-\tilde{g}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\right\}. \tag{Г.5}$$

Следует особо подчеркнуть, что при нахождении выражения (Г.5) мы использовали уравнение (Г.2). Подставляя выражение (Г.5) в уравнение (5.19) и записывая полученное уравнение в форме (8.1), найдем выражения для величины $-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}$

$$-16\pi g\tau_g^{\epsilon\lambda}=\frac{1}{2}(\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta})(\tilde{g}_{\nu\sigma}\tilde{g}_{\tau\mu}-\frac{1}{2}\tilde{g}_{\tau\sigma}\tilde{g}_{\nu\mu})\times$$
$$\times D_\alpha\tilde{\Phi}^{\tau\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\mu\nu}+\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}-\tilde{g}^{\epsilon\beta}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\lambda\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}-$$
$$-\tilde{g}^{\lambda\alpha}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\beta\sigma}D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\tau}+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}_{\tau\sigma}D_\alpha\tilde{\Phi}^{\sigma\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\alpha\tau}+D_\alpha\tilde{\Phi}^{\epsilon\beta}D_\beta\tilde{\Phi}^{\lambda\alpha}-$$
$$-\tilde{\Phi}^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}-m^2\left(\sqrt{-g}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}-\sqrt{-\gamma}\tilde{\Phi}^{\epsilon\lambda}+\tilde{g}^{\epsilon\alpha}\tilde{g}^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\epsilon\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right). \tag{Г.6}$$

Запишем уравнение (5.20) РТГ

$$D_\sigma \tilde{g}^{\sigma\nu}(y) = \partial_\sigma \tilde{g}^{\sigma\nu}(y) + \gamma^\nu_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = 0 \qquad (\Sigma)$$

в несколько другой форме. Для этой цели, используя определение для символа Кристоффеля

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y) = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}), \qquad (Д.1)$$

найдем

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = \sqrt{-g}\left(g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right). \qquad (Д.2)$$

Принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\sigma g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\sqrt{-g(y)}, \\ \partial_\alpha g^{\alpha\nu} &= -g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha g_{\sigma\beta}, \end{aligned} \qquad (Д.3)$$

перепишем (Д.2) в виде

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y)\tilde{g}^{\alpha\beta}(y) = -\sqrt{-g}\partial_\sigma g^{\sigma\nu} - g^{\nu\sigma}\partial_\sigma\sqrt{-g} = -\frac{\partial\tilde{g}^{\sigma\nu}}{\partial y^\sigma}. \qquad (Д.4)$$

С учетом этого равенства исходное уравнение (Σ) принимает вид

$$(\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(y) - \gamma^\nu_{\alpha\beta}(y))g^{\alpha\beta}(y) = 0. \qquad (Д.5)$$

Если от координат "y" перейти к другим криволинейным координатам "z", то символы Кристоффеля принимают вид

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(y) = &\frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}\,\frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial z^\beta}{\partial y^\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(z) + \\ &+\frac{\partial^2 z^\sigma}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\,\frac{\partial y^\lambda}{\partial z^\sigma}. \end{aligned} \qquad (Д.6)$$

Используя это выражение, находим

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = \frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\Bigg[\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(z)g^{\alpha\beta}(z)+$$

$$+\frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}}\ \frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}}g^{\alpha\beta}(z)\Bigg]. \tag{Д.7}$$

На основании (Д.4) выражение (Д.7) запишем в форме

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\left(\tilde{g}^{\mu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right)+$$

$$+g^{\mu\sigma}\frac{\partial^2 y^{\lambda}}{\partial z^{\mu}\partial z^{\sigma}}+\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\ \frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}}\frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}}g^{\alpha\beta}(z). \tag{Д.8}$$

Продифференцировав равенство

$$\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}}\ \frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}} = \delta^{\sigma}_{\alpha} \tag{Д.9}$$

по переменной z^{β}, получим

$$\frac{\partial^2 z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}\partial y^{\nu}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}}\ \frac{\partial y^{\nu}}{\partial z^{\beta}} = -\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^{\mu}}\ \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial z^{\alpha}\partial z^{\beta}}. \tag{Д.10}$$

Учитывая это равенство, в третьем члене (Д.8) находим

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(y)g^{\mu\nu}(y) = -\frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\left(\tilde{g}^{\nu\sigma}\frac{\partial y^{\lambda}}{\partial z^{\sigma}}\right). \tag{Д.11}$$

Подставляя это выражение в (Д.5), получим

$$\Box\, y^{\lambda} = -\gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(y)g^{\alpha\beta}(y), \tag{Д.12}$$

где через $\Box$ обозначен оператор

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g(z)}}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\left(\tilde{g}^{\nu\sigma}\frac{\partial}{\partial z^{\sigma}}\right). \tag{Д.13}$$

14. Элементы тензорного анализа и римановой геометрии

Пусть в n-мерном пространстве задана некоторая координатная система $x^\alpha, i = 1, ..., n$. Вместо этой системы можно выбрать и другую, определяемую выражением

$$x'^\alpha = f(x^\alpha), \quad \alpha = 1, ..., n. \tag{14.1}$$

Эти функции должны быть непрерывными и иметь непрерывные частные производные порядка N. Если якобиан преобразования в каждой точке

$$J = \det \left| \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \tag{14.2}$$

отличен от нуля, то при этом условии переменные x'^α будут независимыми, а, следовательно, первоначальные переменные x^α можно однозначно выразить через новые x'^α:

$$x^\alpha = \varphi(x'^\alpha). \tag{14.3}$$

Физические величины не должны зависеть от выбора системы координат, а поэтому они должны выражаться через геометрические объекты. Простейшим геометрическим объектом является скаляр, который преобразуется при переходе к новым координатам следующим образом:

$$\Phi'(x') = \Phi(x(x')). \tag{14.4}$$

Градиент от скалярной функции $\Phi(x)$ преобразуется по правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial \Phi'(x')}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}. \tag{14.5}$$

Здесь по одинаковым индексам β идет суммирование. Система функций, преобразующаяся при координатных преобразованиях по правилу (14.5), получила название ковариантного вектора

$$A'_\alpha(x') = A_\beta(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}. \qquad (14.6)$$

Соответственно величина $B_{\mu\nu}$ — ковариантный тензор второго ранга, преобразующийся по правилу

$$B'_{\mu\nu}(x') = B_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \qquad (14.7)$$

и т.д.

Перейдем к другой группе геометрических объектов. Рассмотрим преобразование дифференциала координат

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}dx^\alpha. \qquad (14.8)$$

Система функций, преобразующаяся при координатных преобразованиях по правилу (14.8), получила название контравариантного вектора

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x), \qquad (14.9)$$

соответственно величина $B^{\mu\nu}$ — контравариантный тензор второго ранга, преобразующийся по правилу

$$B'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}B^{\alpha\beta}(x) \qquad (14.10)$$

и т.д. Выражения (14.6), (14.7), (14.9) и (14.10) позволяют записать закон преобразования тензора любого вида. Например,

$$B'^\mu_\nu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}B^\alpha_\beta(x). \qquad (14.11)$$

Из трансформационных свойств тензора следует, что если все его компоненты равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю и в другой системе координат.

Легко убедиться, что преобразования ковариантных и контравариантных величин обладают групповым свойством. Например:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}(x), \quad A''^{\nu}(x'') = \frac{\partial x''^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}(x'),$$
$$A''^{\nu}(x'') = \frac{\partial x''^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}(x) = \frac{\partial x''^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}(x). \tag{14.12}$$

Перейдем теперь к тензорной алгебре. Здесь возможны четыре операции: сложение, умножение, свертывание и подстановка индексов.

Сложение и вычитание тензоров

Если нам даны тензоры одинаковой структуры, т.е. имеющие одинаковое число контравариантных индексов и одинаковое число ковариантных индексов, например,

$$A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}, \quad B^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma},$$

то можно образовать тензор

$$C^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} = A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} + B^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}. \tag{14.13}$$

Умножение тензоров

Тензоры можно перемножить независимо от их строения. Например,

$$C^{\alpha\beta\lambda}_{\mu\nu\sigma\rho} = A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} \cdot B^{\lambda}_{\rho}. \tag{14.14}$$

При этом необходимо соблюдать как порядок множителей, так и порядок индексов.

Операция свертывания тензоров

С помощью символа Кронекера

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{при} \quad \mu = \nu, \end{cases} \tag{14.15}$$

который является тензором, можно осуществить операцию свертывания индексов, например,

$$A^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \cdot \delta^{\nu}_{\sigma} = A^{\alpha\beta}_{\mu\sigma}. \qquad (14.16)$$

Здесь слева по одинаковым индексам идет суммирование.

Операция подстановки индексов

Посредством подстановки индексов у тензора мы получим другой тензор, если исходный тензор не был симметричен по этим индексам, например,

$$B^{\mu\nu}_{\lambda\sigma} = A^{\mu\nu}_{\sigma\lambda}. \qquad (14.17)$$

С помощью этой операции, а также операции сложения, можно построить тензор, симметричный по нескольким индексам:

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}). \qquad (14.18)$$

Можно осуществить и построение тензора, антисимметричного по нескольким индексам:

$$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}). \qquad (14.19)$$

Такая операция называется альтернированием.

Риманова геометрия

Римановым пространством V_n называется вещественное дифференцируемое многообразие, в каждой точке которого задано поле тензора

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x^1, ..., x^n) \qquad (14.20)$$

два раза ковариантного, симметричного и невырожденного

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad g = \det|g_{\mu\nu} \neq 0. \qquad (14.21)$$

Тензор $g_{\mu\nu}$ называется метрическим тензором риманова пространства. Функции $g_{\mu\nu}$ непрерывны и дифференцируемы по всем переменным $x^1, ..., x^n$ до N-порядка.

С помощью метрического тензора в римановом пространстве можно ввести инвариантную дифференциальную форму, называемую интервалом

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{14.22}$$

С помощью координатных преобразований эта форма в любой фиксированной точке может быть приведена к диагональному виду. При этом в общем случае диагональные компоненты матрицы $g_{\mu\nu}$ не все будут положительными. Но в силу закона инерции квадратичных форм разность между числом положительных и числом отрицательных диагональных компонент будет постоянна. Эта разность называется сигнатурой метрического тензора. В произвольном римановом пространстве V_n интервал будет знаконеопределенным. Будем в дальнейшем его называть времениподобным $ds^2 > 0$, пространственноподобным $ds^2 < 0$ и изотропным $ds^2 = 0$. Эти названия возникли из специальной теории относительности, где пространство и время образуют единое многообразие, а интервал в декартовых (галилеевых) координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{14.23}$$

В произвольных координатах он принимает форму

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{14.24}$$

Поскольку определитель $|g_{\mu\nu}| \neq 0$, то мы можем построить контравариантный метрический тензор с помощью уравнений

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{14.25}$$

С помощью тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\lambda\sigma}$ можно осуществить подъем и опускание индексов

$$A^\nu = g^{\nu\sigma}A_\sigma, \;\; A_\nu = g_{\nu\sigma}A^\sigma. \tag{14.26}$$

Геодезические линии в римановом пространстве играют такую же роль, как прямые линии в евклидовом пространстве. Они называются экстремальными линиями. Для определения экстремали мы воспользуемся вариационным исчислением. Суть вариационного исчисления состоит в обобщении понятий максимума и минимума. Речь идет не о нахождении экстремума функции, а о нахождении экстремума функционала, т.е. поиске тех функций, которые делают его экстремальным. Расстояние между близкими точками в римановом пространстве определяется интервалом ds. Величина ds не является полным дифференциалом. Интервал между точками a и b равен

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}. \tag{14.27}$$

Экстремум определяется из соотношения

$$\delta \int_a^b ds = \int_a^b \delta(ds) = 0. \tag{14.28}$$

То есть идет поиск таких функций $g_{\mu\nu}(x)$, которые обеспечивают экстремум функционала (интеграла):

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) = 2ds\delta(ds) = \delta(g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu) = \\ = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu}(x)dx^\mu \delta(dx^\nu). \end{aligned} \tag{14.29}$$

Заметим, что

$$\delta(dx^\nu) = d(\delta x^\nu). \tag{14.30}$$

На основании (14.29) и (14.30) имеем

$$\delta(ds) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}U^\mu dx^\nu \delta x^\sigma + g_{\mu\nu}U^\mu d(\delta x^\nu), \;\; U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{14.31}$$

Подставляя (14.31) в (14.28), получим

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} U^\mu U^\nu \delta x^\sigma + g_{\mu\nu} U^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{ds} \right] ds = 0. \quad (14.32)$$

Так как

$$g_{\mu\nu} U^\mu \frac{d(\delta x^\nu)}{ds} = \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} U^\mu \delta x^\nu) - \delta x^\nu \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} U^\mu), \quad (14.33)$$

и на пределах интегрирования $\delta x^\nu = 0$, из (14.32) получим

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} U^\mu U^\nu - g_{\mu\sigma} \frac{dU^\mu}{ds} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} U^\mu U^\lambda \right] ds \delta x^\sigma = 0. \quad (14.34)$$

Представим последний член в (14.34) в форме

$$U^\mu U^\lambda \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{dx^\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} \right) U^\mu U^\lambda. \quad (14.35)$$

Подставляя (14.35) в (14.34), находим

$$\delta S = \int_a^b \left[U^\mu U^\lambda \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right) + \right.$$
$$\left. + g_{\mu\sigma} \frac{dU^\mu}{ds} \right] ds \delta x^\sigma = 0. \quad (14.36)$$

Поскольку вариация δx^σ произвольна, интеграл (14.36) обращается в нуль, только если

$$g_{\mu\sigma} \frac{dU^\mu}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right) U^\mu U^\lambda = 0. \quad (14.37)$$

Умножая (14.37) на $g^{\sigma\alpha}$, получим

$$\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} U^\mu U^\lambda = 0, \quad (14.38)$$

где символы Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ равны

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}). \qquad (14.39)$$

Символы Кристоффеля не являются тензорными величинами. Уравнения (14.38) и являются уравнениями для геодезической линии. Их четыре, но не все они независимы, поскольку имеет место условие

$$g_{\mu\nu}(x) U^\mu U^\nu = 1. \qquad (14.40)$$

Преобразованиями координат x^μ можно добиться обращения в нуль символов Кристоффеля вдоль любой несамопересекающейся выбранной линии [22].

<u>Ковариантное дифференцирование</u>

Возьмем произвольный ковариантный вектор A_λ и свернем его с вектором U^λ, тогда получим скаляр

$$A_\lambda U^\lambda, \qquad (14.41)$$

продифференцировав его по ds, мы так же имеем скаляр:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(A_\lambda U^\lambda) &= \frac{dA_\lambda}{ds} U^\lambda + A_\nu \frac{dU^\nu}{ds} = \\ &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma} U^\sigma U^\lambda + A_\nu \frac{dU^\nu}{ds}. \end{aligned} \qquad (14.42)$$

Подставляя в правую часть выражение (14.38), получим

$$\frac{d}{ds}(A_\lambda U^\lambda) = \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} A_\nu\right] U^\sigma U^\lambda. \qquad (14.43)$$

Поскольку (14.43) скаляр, а U^σ — вектор, стсюда имеем тензор второго ранга

$$A_{\lambda;\sigma} = \frac{DA_\lambda}{dx^\sigma} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\sigma} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda} A_\nu. \qquad (14.44)$$

Здесь и далее точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование, т.е. мы определили ковариантную производную от ковариантного вектора A_λ. Определим теперь ковариантную производную от контравариантного вектора A^λ.

Для этой цели запишем тот же скаляр в виде

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} U^\sigma U^\nu g_{\mu\nu} + \\ + A^\mu g_{\mu\lambda} \frac{dU^\lambda}{ds} + A^\mu U^\nu U^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}. \tag{14.45}$$

Подставляя в правую часть выражение (14.38), получим

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = U^\nu U^\sigma \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} - \right. \\ \left. - A^\mu g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + A^\mu \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right]. \tag{14.46}$$

Учитывая выражение (14.39), имеем

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\sigma\mu}) A^\mu \right] U^\nu U^\sigma. \tag{14.47}$$

Представляя U^ν в форме

$$U^\nu = U_\lambda g^{\lambda\nu} \tag{14.48}$$

и подставляя его в соотношение (14.47), получим

$$\frac{d}{ds}(A^\mu U^\nu g_{\mu\nu}) = \left[\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} A^\mu \right] U^\sigma U_\lambda. \tag{14.49}$$

Поскольку это выражение — скаляр, отсюда следует, что контравариантная производная есть тензор

$$A^\lambda_{;\sigma} = \frac{DA^\lambda}{dx^\sigma} = \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} A^\mu. \tag{14.50}$$

Таким образом, мы определили ковариантную производную от контравариантного вектора A^λ.

Используя формулы (14.44) и (14.50), можно получить ковариантные производные и от тензора второго ранга:

$$A_{\mu\nu;\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} A_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} A_{\lambda\mu}, \tag{14.51}$$

$$A^{\mu\nu}_{;\sigma} = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^{\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^{\mu\lambda}, \tag{14.52}$$

$$A^\nu_{\rho;\sigma} = \frac{\partial A^\nu_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\rho\sigma} A^\nu_\lambda + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^\lambda_\rho. \tag{14.53}$$

Используя выражение (14.51), легко показать, что

$$g_{\mu\nu;\sigma} \equiv 0,$$

т.е. ковариантная производная от метрического тензора равна нулю.

Тензор кривизны Римана–Кристоффеля

В римановом пространстве операция ковариантного дифференцирования некоммутативна. Ковариантное дифференцирование вектора A_λ сначала по переменной x^μ, а затем по x^ν приводит к следующему выражению:

$$A_{\lambda;\mu\nu} = \frac{\partial A_{\lambda;\mu}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda} A_{\tau;\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} A_{\lambda;\tau}, \tag{14.54}$$

но так как

$$\begin{aligned} &A_{\lambda;\mu} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\lambda\mu} A_\tau, \quad A_{\tau;\mu} = \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma, \\ &A_{\lambda;\tau} = \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma, \end{aligned} \tag{14.55}$$

после подстановки этих выражений в (14.54) имеем

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\mu\nu} = {} & \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\mu} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \\ & - A_\tau \frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\tau} A_\sigma + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma. \end{aligned} \tag{14.56}$$

Вычислим теперь величину $A_{\lambda;\nu\mu}$:

$$A_{\lambda;\nu\mu} = \frac{\partial A_{\lambda;\nu}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} A_{\tau;\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} A_{\lambda;\tau}, \tag{14.57}$$

учитывая выражения

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\nu} &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu} A_\tau, \quad A_{\tau;\nu} = \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\tau\nu} A_\sigma, \\ A_{\lambda;\tau} &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma, \end{aligned} \tag{14.58}$$

соотношение (14.57) принимает вид

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\nu\mu} &= \frac{\partial^2 A_\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\mu} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} \frac{\partial A_\tau}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\tau} - \\ &- A_\tau \frac{\partial \Gamma^\tau_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\tau_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\tau} A_\sigma + \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\tau} A_\sigma. \end{aligned} \tag{14.59}$$

На основании (14.56) и (14.59) в разности остаются только члены

$$\begin{aligned} A_{\lambda;\mu\nu} - A_{\lambda;\nu\mu} = A_\sigma \Bigg[&\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \\ &+ \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\tau} \Bigg]. \end{aligned} \tag{14.60}$$

Величина $R^\sigma_{\lambda\mu\nu}$ называется тензором кривизны Римана:

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\tau} - \Gamma^\tau_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\tau}. \tag{14.61}$$

Из этого тензора можно сверткой получить тензор второго ранга — тензор Риччи:

$$R_{\lambda\nu} = R^\sigma_{\lambda\sigma\nu} = \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\tau_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\sigma\tau} - \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\tau}. \tag{14.62}$$

Заметим, что для интервала вида (14.23) или (14.24) тензор кривизны равен нулю.

Из выражения (14.61) очевидно, что тензор кривизны антисимметричен по двум последним индексам μ, ν

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\sigma}_{\lambda\nu\mu}.$$

Можно построить тензор кривизны с нижними индексами:

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = g_{\rho\sigma} R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}.$$

Он обладает следующими свойствами симметрии:

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\rho\mu\nu} = -R_{\rho\lambda\nu\mu}, \quad R_{\rho\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\lambda}.$$

Мы видим, что тензор кривизны антисимметричен по отношению как к первой паре индексов, так и ко второй. Он также симметричен и после перестановки местами пар индексов без изменения их порядка.

В римановом пространстве существует локальная система координат, в которой первые производные от компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ равны нулю. При этом, естественно, символы Кристоффеля также равны нулю. Такие координаты называются римановыми. Они удобны для нахождения тензорных тождеств, поскольку, если мы установили, что в этой системе координат некоторый тензор равен нулю, то в силу тензорных преобразований он будет равен нулю в любой системе координат.

Тензор кривизны в римановой системе координат равен

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}. \tag{14.63}$$

Ковариантная производная от него имеет вид

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} = \partial_{\rho}\partial_{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}. \tag{14.64}$$

Переставляя циклически индексы μ, ν, ρ и складывая полученные выражения, получим тождество Бьянки

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} + R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\nu} + R^{\sigma}_{\lambda\nu\rho;\mu} \equiv 0. \tag{14.65}$$

Свертывая по индексам σ и ν, находим

$$- R_{\lambda\mu;\rho} + R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\sigma} + R_{\lambda\rho;\mu} = 0. \tag{14.66}$$

Умножим это выражение на $g^{\lambda\alpha}$:

$$-R^{\alpha}_{\mu;\rho} + (g^{\lambda\alpha} R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu})_{;\sigma} + R^{\alpha}_{\rho;\mu} = 0.$$

Мы здесь учли ранее установленное свойство для метрических коэффициентов: их можно при ковариантном дифференцировании свободно вносить или выносить из под знака производной.

Свертывая индексы ρ и α, получим

$$- R^{\rho}_{\mu;\rho} + (g^{\lambda\rho} R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu})_{;\sigma} + \partial_{\mu} R \equiv 0, \tag{14.67}$$

где

$$R = R^{\rho}_{\rho} = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$

— скалярная кривизна.

Рассмотрим под знаком производной второй член в тождестве (14.67):

$$g^{\lambda\rho} R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu} = g^{\lambda\rho} g^{\nu\sigma} R_{\nu\lambda\rho\mu} = g^{\nu\sigma} g^{\lambda\rho} R_{\lambda\nu\mu\rho} = g^{\nu\sigma} R^{\rho}_{\nu\mu\rho} = -R^{\sigma}_{\mu}.$$

Мы здесь использовали свойства симметрии тензора кривизны и определение тензора $R_{\mu\nu}$. Подставляя это выражение в (14.67), получим

$$(R^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu} R)_{;\rho} = \nabla_{\rho}(R^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu} R) \equiv 0. \tag{14.68}$$

Введем обозначение

$$G^{\rho}_{\mu} = R^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu} R. \tag{14.69}$$

На основании (14.53) тождество (14.68) можно записать в развернутой форме

$$\nabla_{\nu} G^{\nu}_{\rho} = G^{\nu}_{\rho;\nu} = \frac{\partial G^{\nu}_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} G^{\nu}_{\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} G^{\lambda}_{\rho} \equiv 0, \tag{14.70}$$

учитывая, что

$$\Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \qquad (14.71)$$

и дифференцируя детерминант g

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}, \qquad (14.72)$$

находим путем сравнения (14.71) и (14.72)

$$\Gamma^{\nu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\lambda}(\sqrt{-g}). \qquad (14.73)$$

Подставляя это выражение в (14.70), получим

$$\nabla_{\nu}(\sqrt{-g}G^{\nu}_{\rho}) = \partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{\nu}_{\rho}) - \sqrt{-g}\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}G^{\nu}_{\lambda} \equiv 0. \qquad (14.74)$$

Используя выражение (14.39), для символа Кристоффеля находим

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-g}G^{\nu}_{\rho}) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\rho}}\sqrt{-g}G_{\lambda\sigma} \equiv 0. \qquad (14.75)$$

Такое тождество впервые было получено Д.Гильбертом. Оно было необходимо при построении уравнений общей теории относительности.

В заключение покажем, что величина, определяющая объем

$$v' = \int \sqrt{-g'}dx^{0\,\prime}dx^{1\,\prime}dx^{2\,\prime}dx^{3\,\prime}, \qquad (14.76)$$

является инвариантом при произвольных преобразованиях координат. При координатных преобразованиях имеем

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\sigma}(x)\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}.$$

Запишем это выражение в форме

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\, g_{\lambda\sigma}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}.$$

Вычислим детерминант $g' = \det g'_{\mu\nu}$

$$g' = \det\left(g_{\sigma\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right)\det\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right) =$$
$$= \det(g_{\lambda\sigma})\det\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right)\det\left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\right).$$

Отсюда имеем

$$g' = gJ^2. \tag{14.77}$$

Здесь J есть якобиан преобразования

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})}. \tag{14.78}$$

Итак

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g}J. \tag{14.79}$$

Подставляя это выражение в (14.76), получим

$$v' = \int \sqrt{-g}\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0\prime}, x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime})}dx^{0\prime}dx^{1\prime}dx^{2\prime}dx^{3\prime} =$$
$$= \int \sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3. \tag{14.80}$$

Но правая часть есть объем

$$v = \int \sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3. \tag{14.81}$$

Итак, мы установили равенство

$$v' = v. \tag{14.82}$$

Отсюда следует, что величина

$$\sqrt{-g}d^4x \tag{14.83}$$

также является инвариантом относительно произвольных координатных преобразований.

Следует отметить некоторые особенности римановой геометрии. В общем случае риманово пространство нельзя описать в одной системе координат, для его описания необходим атлас карт. Именно поэтому топология риманова пространства существенно отличается от топологии евклидова пространства. В общем случае в римановом пространстве отсутствует группа движения. В псевдоевклидовом пространстве, описываемом интервалом (14.23) или (14.24), существует десятипараметрическая группа движения пространства.

Основная характеристика римановой геометрии — тензор кривизны $R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}$ — является форминвариантной величиной относительно преобразований координат. Также форминвариантной величиной является и тензор $R_{\lambda\nu}$. Здесь под форминвариантностью понимается не один и тот же вид функциональной зависимости тензора кривизны от выбора системы координат, а одинаковость построения тензора кривизны при заданном выражении $g_{\mu\nu}(x)$, подобно тому как выражение

$$\square A^{\nu}(x)$$

одинаково записывается в галилеевых координатах в различных инерциальных системах при заданном выражении A^{ν}. Между инвариантностью и форминвариантностью имеется существенное различие. Например, оператор $\gamma^{\mu\nu}(x)D_{\mu}D_{\nu}$ (где $\gamma^{\mu\nu}(x)$ — метрический тензор пространства Минковского) при произвольных координатных преобразованиях является инвариантом, т.е. скаляром, но он не будет при этом форминвариантным. Он будет форминвариантным только при таких преобразованиях координат, при которых тензор $\gamma^{\mu\nu}(x)$ остается форминвариантным, следовательно

$$\delta\gamma^{\mu\nu}(x) = 0.$$

Тензор кривизны изменяется при калибровочных преобразованиях (3.16) по следующему закону:

$$\delta_\epsilon R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\sigma\nu\alpha\beta} D_\mu \epsilon^\sigma - R_{\mu\sigma\alpha\beta} D_\nu \epsilon^\sigma -$$
$$-R_{\mu\nu\sigma\beta} D_\alpha \epsilon^\sigma - R_{\mu\nu\alpha\sigma} D_\beta \epsilon^\sigma - \epsilon^\sigma D_\sigma R_{\mu\nu\alpha\beta}.$$

Это изменение обусловлено тем, что произвольные координатные системы физически не являются эквивалентными.

В тексте книги наряду с ковариантными производными в римановом пространстве ∇_λ встречаются ковариантные производные в пространстве Минковского D_λ. Разница состоит в том, что при построении ковариантных производных D_λ необходимо в формулах (14.50) – (14.53) вместо символов Кристоффеля риманова пространства $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ поставить символы Кристоффеля пространства Минковского $\gamma^\nu_{\alpha\beta}$.

В заключение приведем теорему Вейля–Лоренца–Петрова [21]. Совпадение уравнений изотропных и времениподобных геодезических линий соответственно для двух римановых пространств с метриками $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x)$ с одинаковой сигнатурой -2 приводит к тому, что их метрические тензоры отличаются лишь постоянным множителем. Из теоремы следует, что если в одной и той же координации x мы имеем разные метрические тензоры $g_{\mu\nu}(x)$ и $g'_{\mu\nu}(x)$, то для них будут при одинаковых условиях различные геодезические линии, а, следовательно, и различные физические результаты, именно поэтому ситуация, возникающая в ОТО с появлением множественности метрик в одной координации, и приводит к неоднозначности описания гравитационных эффектов.

ДОПОЛНЕНИЕ

О гравитационной силе

На шестьдесят седьмой странице приведено выражение для силы гравитации. Ниже мы дадим вывод этого выражения из уравнения геодезической линии в эффективном римановом пространстве. Уравнение для геодезической линии имеет вид

$$\frac{dp^\nu}{ds} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0, \;\; p^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}, \;\; ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0. \quad (1)$$

Согласно определению ковариантной производной в пространстве Минковского, имеем

$$\frac{Dp^\nu}{ds} = \frac{dp^\nu}{ds} + \gamma^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), получим

$$\frac{Dp^\nu}{ds} = -G^\nu_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta. \quad (3)$$

Здесь

$$G^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta} - \gamma^\nu_{\alpha\beta} \quad (4)$$

Запишем левую часть соотношения (3) в форме

$$\frac{Dp^\nu}{ds} = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 \left[\frac{DV^\nu}{d\sigma} + V^\nu \frac{\frac{d^2\sigma}{ds^2}}{\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2}\right], \;\; V^\nu = \frac{dx^\nu}{d\sigma}. \quad (5)$$

Здесь V^ν — времениподобный четырехвектор скорости в пространстве Минковского, удовлетворяющий условию

$$\gamma_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 1, \;\; d\sigma^2 > 0. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (3), получим

$$\frac{DV^\nu}{d\sigma} = -G^\nu_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta - V^\nu \frac{\frac{d^2\sigma}{ds^2}}{\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2} \quad (7)$$

На основании (6) имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \gamma_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta. \tag{8}$$

Дифференцируя это выражение по ds, получим

$$\frac{\frac{d^2\sigma}{ds^2}}{\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2} = -\gamma_{\lambda\mu}G^{\mu}_{\alpha\beta}V^\lambda V^\alpha V^\beta. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в (7), находим [4]

$$\frac{DV^\nu}{d\sigma} = -G^{\mu}_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta(\delta^\nu_\mu - V^\nu V_\mu). \tag{10}$$

Отсюда очевидно, что движение пробного тела в пространстве Минковского происходит под действием четырехвектора силы F^ν:

$$F^\nu = -G^{\mu}_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta(\delta^\nu_\mu - V^\nu V_\mu), \quad V_\mu = \gamma_{\mu\sigma}V^\sigma. \tag{11}$$

Легко убедиться, что

$$F^\nu V_\nu = 0. \tag{12}$$

Левая часть уравнения (10) по определению равна

$$\frac{DV^\nu}{d\sigma} = \frac{dV^\nu}{d\sigma} + \gamma^{\nu}_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta. \tag{13}$$

Следует особо отметить, что движение пробного тела по геодезической линии эффективного риманова пространства может быть представлено как движение в пространстве Минковского под действием силы F^ν, только если выполняется принцип причинности. Сила гравитации и тензор кривизны Римана, возникающие на основе гравитационных уравнений (5.19) и (5.20), взаимно связаны. Так, если тензор кривизны равен нулю, то в силу уравнений (5.19) и (5.20) будет равна нулю и сила гравитации. В том случае, когда тензор кривизны отличен от нуля и $R_{\mu\nu} \neq 0$, то сила гравитации также не равна нулю. И наоборот, если сила гравитации F^ν, возникающая на основе уравнений (5.19) и (5.20), отлична от нуля, то и кривизна Римана не равна нулю. Обращение силы гравитации F^ν в нуль приводит к равенству нулю тензора кривизны Римана.

Является ли метрическое поле неинерциальной системы частным случаем гравитационного физического поля?

Из условий причинности (6.10) и (6.11) следует, что если вектор L^ν удовлетворяет условию

$$\gamma_{\mu\nu} L^\mu L^\nu < 0, \tag{1}$$

то должно выполняться также неравенство

$$g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu < 0. \tag{2}$$

Свернем уравнение (10.1) с помощью вектора L^ν, определяемого неравенством (1),

$$m^2 \gamma_{\mu\nu} L^\mu L^\nu = 16\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) -$$

$$-2R_{\mu\nu} L^\mu L^\nu + m^2 g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu. \tag{3}$$

Поскольку мы рассматриваем только метрические поля пространства Минковского, уравнение (3) упрощается:

$$m^2 \gamma_{\mu\nu} L^\mu L^\nu = 16\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + m^2 g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu. \tag{4}$$

Для идеальной жидкости тензор энергии-импульса вещества имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu},$$
$$T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \rho - 3p, \quad U^\nu = \frac{dx^\mu}{ds}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$m^2\gamma_{\mu\nu}L^\mu L^\nu = 16\pi(\rho + p)(U_\mu L^\mu)^2 -$$
$$-8\pi g_{\mu\nu}L^\mu L^\nu \left(\rho - p - \frac{m^2}{8\pi}\right). \tag{6}$$

Из условий (1) и (2) следует, что правая часть уравнения (6) строго положительна, поскольку

$$\rho > p + \frac{m^2}{8\pi}, \tag{7}$$

тогда как левая часть уравнения (6) строго отрицательна. Отсюда следует, что при наличии вещества ни одно метрическое поле пространства Минковского не удовлетворяет гравитационным уравнениям, а поэтому метрические поля, возникающие в неинерциальных системах координат пространства Минковского, не могут рассматриваться как гравитационные поля. В случае отсутствия вещества $\rho = p = 0$ уравнение (6) имеет единственное решение

$$g_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x). \tag{8}$$

Список литературы

1. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
2. *Власов А.А., Логунов А.А.* // ТМФ. 1989. Т.78, № 3. С.323–329.
3. *Власов А.А., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1984. Т.61, № 3. С.323–326.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
5. *Логунов А.А.* // ТМФ. 1989. Т.80, № 2. С.165–172.
6. *Логунов А.А.* // ТМФ. 1992. Т.92, № 2. С.191–206.
7. *Логунов А.А.* Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987.
8. *Логунов А.А., Лоскутов Ю.М.* // ДАН СССР. 1989. Т.305, № 4. С.848–851.
9. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1984. Т.61, № 3. С.327–345.
10. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
11. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1991. Т.86, № 1. С.3–15.
12. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1997. Т.110, № 1. С.5–24.
13. *Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* // ТМФ. 1999. Т.121, № 1. С.4–24.
14. *Лоскутов Ю.М.* // ТМФ. 1990. Т.82, № 2. С.304–312.
15. *Лоскутов Ю.М.* // Вест. МГУ. Сер.3, Физика, астрономия. 1991. Т.32, № 4. С.49.
16. *Лоскутов Ю.М.* // ТМФ. 1996. Т.107, № 2. С.329–343.
17. *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.

18. *Мах Э.* Механика: Историко-критический очерк ее развития. // А.Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979.

19. *Меллер К.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.

20. *Паули В.* Теория относительности. М.: Гостехиздат, 1947.

21. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

22. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Гостехиздат, 1953.

23. *Синг Дж.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

24. *Фок В.А.* // ЖЭТФ. 1939. Т.9, № 4. С.375.

25. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961.

26. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.

27. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I. Ст. 22.

28. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I. Ст.21.

29. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т.I. Ст. 21, 28, 29, 32.

30. *Bohm D.* The special theory of relativity. N.Y.: Benjamin, 1965.

31. *Gershtein S.S., Logunov A.A., Mestvirishvili M.A.* // Phys. Atomic Nuclei. 1998. Vol.61, № 8. P.1420–1429.

32. *Hawking S.W., Penrose R.* // Proc. Roy. Soc., Ser.A. 1970. Vol.314. P.529.

33. *Kolb E.W., Turner M.S.* The tarly Universe. L.: Addison-Wesley, 1990.

34. *Logunov A.A.* // Theor. and Math. Phys. 1995. Vol.104, N 3. P.1184–1187.

35. *Logunov A.A.* Relativistic theory of gravity and the mach principle. Dubna, 1997.

36. *Logunov A.A.* // Phys. Particles and Nuclei. 1998. Vol.29, № 1.

37. *Logunov A.A.* Relativistic theory of gravity. N.Y.: Nova Science Publ., 1998. (Horizons in World Phys.; Vol.215).

38. *Logunov A.A., Mestvirishvili M.A.* The relativistic theory of gravitation. Moscow: Mir, 1989.

39. *Loskutov Yu.M.* // Proc. of the VI Marcel Grossman meeting on gen. relativ. 1991. Pt B. P. 1658–1660.

40. *Poincaré H.* // Bull. Sci. Math. Ser.2. 1904. Vol.28. P.302–328.

41. *Rozen N.* // Phys.Rev. 1940. Vol.57. P.147.

42. *Pugh G.E.* // WSEG Res. Mem. US Dep. of Defense. 1959. N 11.

43. *Shapiro I.I.* Centenario di Einstein: Astrofisica e cosmologia gravitazione quanti e relativita. Firenze: Giuni Barbéra, 1979. То же на рус. яз.: Астрофизика: кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982.

44. *Schiff L.I.* // Proc. Nat. Acad. Sci. US. 1960. Vol.46. P.871; Phys.Lett. 1960. Vol.4. P.215.

45. *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. N.Y. etc., 1972.

Научное издание

Логунов Анатолий Алексеевич

**ТЕОРИЯ
ГРАВИТАЦИОННОГО
ПОЛЯ**

Издание второе, дополненное

*Утверждено к печати
Научно-техническим советом
Государственного научного центра РФ
"Институт физики высоких энергий"*

Редактор-организатор *Н.А. Степанова*

Редактор *Л.С. Аюпова*
Художник *Т.В. Болотина*
Художественный редактор *В.Ю. Яковлев*
Технический редактор *О.В. Аредова*

Набор и верстка выполнены
на компьютерной технике
в ГНЦ РФ "Институт физики высоких энергий"
И.В. Филимоновой

ЛР № 020297 от 23.06.1997

Подписано к печати 15.01.2001
Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 15,0. Усл.кр.-отт. 15,5. Уч.-изд.л. 11,2
Доп. тираж 2000 экз. Тип. зак. 1503

Издательство "Наука"
117997 ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., 90

ППП " Типография "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-02-002741-3

9785020027411

АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ "АКАДЕМКНИГА"

Магазины "Книга–почтой"

121009 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 75 (код 812) 235-05-67

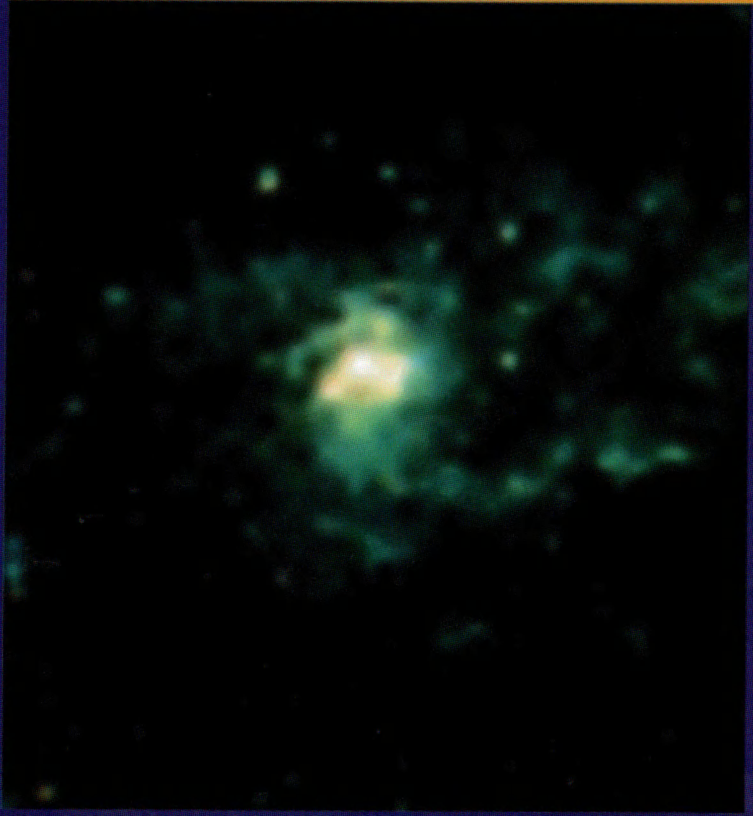
Магазины "Академкнига" с указанием отделов "Книга–почтой"

690088 Владивосток, Океанский пр-т, 140 ("Книга–почтой"); (код 4232) 5-27-91
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 ("Книга–почтой"); (код 3432) 55-10-03
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 ("Книга–почтой"); (код 3952) 46-56-20
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00
117192 Москва, Мичуринский пр-т, 12; 932-74-79
103054 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 921-55-96
103624 Москва, Б. Черкасский пер., 4; 298-33-73
630091 Новосибирск, Красный пр-т, 51; (код 3832) 21-15-60
630090 Новосибирск, Морской пр-т, 22 ("Книга–почтой"); (код 3832) 35-09-22
142292 Пущино Московской обл., МКР "В", 1 ("Книга–почтой"); (13) 3-38-60
443022 Самара, проспект Ленина, 2 ("Книга–почтой"); (код 8462) 37-10-60
191104 Санкт-Петербург, Литейный пр-т, 57; (код 812) 272-36-65
199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2; (код 812) 328-32-11
194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий пр-т, 4; (код 812) 247-70-39
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16; (код 812) 323-34-62
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18; (код 3822) 22-60-36
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 ("Книга–почтой"); (код 3472) 24-47-74
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49 (код 3472) 22-91-85

Коммерческий отдел, г. Москва
Телефон 241-03-09
E-mail: AKADEM. KNIGA @ g. 23 relcom.ru
Склад, телефон 291-58-87
Факс 291-87-68

По вопросам приобретения книг
просим обращаться также
в Издательство по адресу:
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
тел. факс (095) 334-98-59
E-mail: initsiat @ naukaran.ru

А. А. Логунов



ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

«НАУКА»